PRÉFACE

Bull General Electric a toujours été présent dans la compétition qui, en vingt ans à peine, nous a fait passer de la première à la troisième génération des ordinateurs. Et voici déjà l'époque de la quatrième génération. Époque, au sens fort que lui donnait Bossuet, c'est-à-dire d'un fait mémorable capable d'inaugurer tout un enchaînement de conséquences. Pour que ces conséquences ne soient pas fâcheuses pour la civilisation à venir, il est indispensable que l'homme et, avant lui l'enfant, apprenne à rester en état de conquête sur cet avenir toujours lié à une incertitude plus grande.

Il était tout à fait normal que la réalisation très étudiée, du Professeur S. Chamecki retienne l'attention d'un constructeur de ces matériels qui ont tenu si souvent la vedette : Bull General Electric. En effet, dès l'avènement des simples calculateurs, les auteurs en mal de merveilleux ont aussitôt vu dans ces premières machines un concurrent redoutable : le robot. Les ordinateurs à performances plus accusées faisaient présager un rival ; quant à ceux de la troisième génération, pouvant intégrer des quantités prodigieuses de données et restituer l'information sous forme optique, sonore, éventuellement même la transmettre à distance, c'était à coup sûr l'asservissement de l'homme à la machine. Vaine appréhension... pourvu que l'homme n'aliène pas sa liberté en confondant le but et le moyen, et, qu'il s'efforce toujours, par l'enrichissement de son esprit, de défendre son individualité. Alors, dans ces conditions, la machine restera ce qu'elle doit être : un outil au service de son utilisateur. Mais, pour que ce service soit rendu au mieux des intérêts de chacun, encore convient-il qu'il ne demeure pas l'apanage de quelques initiés, lesquels pouvant se « spécialiser » trop rapidement, risqueraient d'entraîner le monde dans une étrange et dangereuse aventure.

Pour ne pas devenir l'esclave d'un outil, « suffit de bien le connaître. Les calculateurs ne font que des opérations très simples, surtout des additions, ce qui est d'un grand réconfort pour nous tous qui pratiquons couramment des algorithmes aussi compliqués que ceux de la division ou de l'extraction d'une racine carrée. Mais restons modestes, car ils nous offrent, en contrepartie, cette exactitude, cette patience et cette fidélité qui ne sont pas toujours nos qualités dominantes. Une analyse très superficielle pourrait nous laisser supposer que ces machines sont étrangères aux mathématiques et qu'utilisateurs, aussi bien que constructeurs, pourraient allègrement dédaigner les connaissances acquises... dangereuses illusions ! Un calculateur, ou un ordinateur, n'est pas un assemblage, plus ou moins compliqué, d'organes techniques mais un édifice logique dont l'utilisateur ne tirera le meilleur parti que s'il est familiarisé avec les structures composant cet édifice.

C'est alors que se pose le problème d'enseignement pour les constructeurs et les utilisateurs. Aux mathématiques classiques, qui ont été bien souvent les compagnes si appréciées de notre âge tendre, il faut maintenant ajouter les mathématiques modernes qui ne sont, en définitive, que le prolongement logique des premières. Au raisonnement dans le continu, il a fallu adjoindre un nouvel univers dans lequel le discret est de règle. L'habitude des calculs sur des nombres réels ou rationnels, toujours valables du reste, mais non adaptés aux possibilités de ces ordinateurs travaillant par « **tout** » ou « **rien** », a été quelque peu bousculée. Les algèbres de Boole finies et, en particulier, l'algèbre binaire, autorisent la conception et la réalisation des « **outils logiques** » capables de réaliser à la lettre le « **programme** » élaboré par l'esprit de l'homme. Programmes dans lesquels ces tables, au nom si évocateur de « **vérité** », permettent de juger de l'exactitude des propositions énoncées. Mais pour éviter que l'emploi de ces nouvelles opérations, somme et produit logiques, ne déroute les esprits rompus aux règles de l'arithmétique, il est souhaitable de passer par la théorie des ensembles pour montrer, par exemple, pourquoi l'expression :

$$\left|\begin{matrix} a \\ bc \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right| \left|\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}\right|$$

qui n'est pas admise en arithmétique, s'introduit tout naturellement, et sans aucun artifice, en algèbre de Boole. Partant d'un simple divertissement, d'un jeu certes attrayant mais en plus capable de stimuler son esprit, il est normal que l'enfant pose rapidement l'éternelle question du disciple au maître, en vigueur depuis Euclide : « **Qu'est-ce que tout cela peut me rapporter ?** ».

Certains, ne voyant dans les mathématiques qu'une suite interminable de nombres ou des tracés de courbes, peuvent être tentés de conclure qu'il ne s'agit plus là de mathématiques. Qu'ils restent persuadés qu'il n'y a aucune contradiction, ou aucune opposition, entre les mathématiques classiques et les mathématiques modernes. Si les premières conservent toute leur utilité, les secondes permettent de passer de la simple pratique d'un art à un commerce plus noble, celui de l'esprit, en rendant accessible à tous les modes de raisonnement. Il ne faut pas que les parents se désintéressent de la formation de l'esprit de leurs enfants, ils doivent rester le plus longtemps possible ceux à qui on peut tout demander et qui ont réponse à tout. C'est une des raisons pour laquelle le Professeur S. Chamecki et le Professeur P. Vissio ont rédigé, à leur intention, ce fascicule.

Inaudi, virtuose du Calcul, a beaucoup impressionné les foules, il est avantageusement remplacé aujourd'hui par un calculateur. L'ordinateur le plus puissant ne peut prétendre remplacer un H. Poincaré ou un A. Einstein. Dans ce tourbillon d'information, signe de notre temps, il vaut beaucoup mieux « **des têtes bien formées que des têtes trop pleines** » et dans ce domaine, maîtres et parents auront toujours fort à faire.

G. Cullman
Conseiller Scientifique
Bull General Electric

PREMIÈRE PARTIE

PRINCIPE
DE L'ORDINATEUR J.R. 01

LOGIOUE MATHÉMATIOUE • ENSEMBLES
ALGÈBRE DE BOOLE • SYSTÈME ·BINAIRE

1 Phénomène binaire

1.1 *Définition*

Il est fréquent qu'un **phénomène** se traduise par l'existence de d **eux états différents** et **deux seulement**. Un tel **phénomène** est dit **binaire**.

Ainsi :

— **un circuit électrique** ne peut être qu'ouvert ou fermé ;

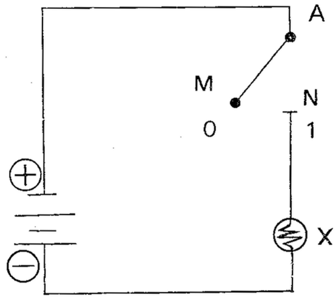
— **en logique** mathématique, on ne considère, parmi les phrases ayant une signification, que celles dont on s'accorde à reconnaître qu'elles sont soit vraies, soit fausses. De telles phrases sont appelées **propositions**.
Par exemple : « **Paris est la capitale de la France** » est une proposition (vraie) ; « $12+2=5$ » est une proposition (fausse). « **Si je dis : je mens, est-ce que je mens ?** » n'est pas une proposition.

— **en mathématiques**, un ensemble est défini lorsque, pour tout objet, on peut répondre par **« oui »** ou par **« non »** à la question : **« Cet objet fait-il partie de l'ensemble ? »**. De même, une propriété mathématique, est soit vraie, soit fausse.
Ainsi, par exemple, on peut parler de :
  — l'ensemble des lettres **a, b, c, d**. On note {a, b, c, d} cet ensemble ;
  — l'ensemble des nombres entiers pairs. On ne peut pas parler de **« l'ensemble des personnes intelligentes »** car... chacun voudrait faire partie de cet ensemble et, cependant, chacun reconnaît qu'il y a partout des... imbéciles !

— **dans la numération binaire**. les seuls chiffres utilisés sont 0 et 1. Par suite, dans l'écriture d'un nombre entier, la suite des **chiffres** ne contient que des 0 ou des 1 (voir page 29).
Exemples :
zéro sera noté 0 ; **un** sera noté 1 ;
deux est formé d'**une paire** et de **zéro** unité ; il est noté 10 (lire **« un, zéro »**) ;
trois est formé d'**une paire** et de **une** unité ; il est noté 11 (lire **« un, un »**) ;
quatre est formé d'**une** « paire de paires », **zéro** paire, **zéro** unité ; il est donc noté 100 (lire **« un. zéro. zéro »**) ;
cinq est formé d'**une** « paire de paires », **zéro** paire, **une** unité ; « est donc noté 101 (lire **« un, zéro. un »**).
Alors : **six** est noté 110 ; **sept** : 111 ; **huit** : 1000 ; **neuf** : 1001 ; **dix** : 1010 ; **onze** : 1011 ; etc.

1.2 *Représentations d'un phénomène binaire*

Soit A un phénomène binaire. Puisque A ne prend que **deux** états s'excluant mutuellement (**vrai, faux**) , on affecte à l'un des états la **valeur** 0 (en général, à la fausseté), à l'autre état la **valeur** 1 (en général, à la vérité).



Par exemple :

— ***pour un montage électrique*** : Dans cette figure, M et N sont les deux bornes d'un circuit électrique. Le contact -noté a - si A est le phénomène qu'il « représente », est ouvert au repos (le courant ne passe donc pas et la lampe X reste éteinte) et, dans cette position, « correspond à l'état 1 du phénomène A. Lorsque l'on **actionne** le contact a, alors le courant passe et, dans cette position, le contact correspond à l'état 1 du phénomène A et la lampe X s'allume.
« **importe de remarquer que, dans les représentations des montages électriques,. tous les contacts sont considérés à l'état de repos**, c'est-à-dire non actionnés.

A
1
0

ou

A
V
F

(V pour **vrai**; F pour **faux**).

— ***en logique***, on dresse la table de **valeur**, ou de **vérité**, de chaque proposition, de la façon ci-contre pour la proposition A.

A
V
F

ou

A
1
0

— en mathématiques, on schématise les ensembles que l'on considère de l'une ou l'autre des manières ci-dessous. (Nous avons schématisé l' **ensemble des lettres** de l'alphabet français).

Lettres de l'alphabet français

voyelles	consonnes
a	b, c, d, f, g,
e i	h, j, k, l, m,
o u	n,p, q, r, s,
y	t, v, w, x, z.

Diagramme de Caroll

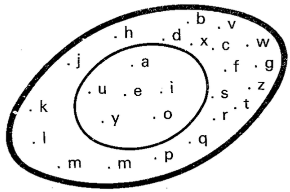


Diagramme d'Euler-Venn

2 Savoir dire « NON » .

— ***En logique.***
Soit la proposition A : « **demain, j'irai au cinéma** ». « est possible de considérer la nouvelle proposition, notée $\bar{A}$ (lire « **A barre** » ou « **non A** ») suivante : **« demain, je n'irai pas au cinéma ».** Cette nouvelle proposition, appelée **négation** de A est : vraie quand A est fausse et est fausse si A est vraie. Autrement dit, les tables de vérité (ou de valeurs) des propositions A et $\bar{A}$ sont :

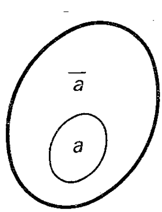
A	$\bar{A}$
V	F
F	V

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

Ce résultat est valable, plus généralement, **quelle que soit la proposition** A **considérée**.

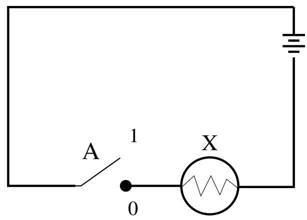
— ***En théorie des ensembles***, dès que l'on considère une **partie** d'un ensemble (par exemple, les voyelles de l'alphabet français), on définit par cela même une autre partie (appelée **complémentaire** de la précédente [par exemple, les **nonvoyelles** (ou consonnes)]. Si la première partie rend vraie une certaine propriété (ou proposition A), alors la partie complémentaire rend vraie la proposition $\bar{A}$. On schématise cela de l'une des façons suivantes (en désignant par $\bar{a}$ la partie complémentaire de la partie a).

a	$\bar{a}$



— ***Montage électrique.***

Il suffit que l'interrupteur, **à l'état de repos** soit sur la position 1, lorsque A est vraie. Alors, **en agissant sur lui**, « passera sur la position 0. Autrement dit, la lampe X est éteinte quand A est vraie, allumée quand$A$ est faux. Ce montage réalise donc la négation $\bar{A}$ de A.



$$\boxed{X = \bar{A}}$$

— ***Phénomène binaire*** **.** Soit le phénomène : *« éclairage public des rues »*. Affectons la valeur 0 à l'absence d'éclairage artificiel et la valeur 1 au cas contraire. Soit A le phénomène « éclairage naturel » prenant la valeur 1 si cet éclairage est jugé suffisant, la valeur 0 dans le contraire.
Il est immédiat que l'éclairage public doit prendre la valeur 1 si A prend la valeur 0 et la valeur 0 si A prend la valeur 1. Donc $\bar{A}$ représente le phénomène « éclairage public ».

3 Savoir dire « ET ».

— ***En logique*** **: conjonction de deux propositions** ou **produit logique**.
Soit la phrase : **« demain j'irai au cinéma et j'irai voir l'ami Pierre »**.
Si l'on considère les deux propositions :
A : **« demain j'irai au cinéma »**
B : **« demain j'irai voir l'ami Pierre »**
La phrase proposée s'écrit $\boxed{AB}$. Chacun s'accordera à reconnaître qu'elle n'est **vraie** que si les deux propositions A, B sont simultanément vraies (un cas) ; **fausse** si l'une au moins des deux propositions est fausse (trois cas : A fausse, B vraie ; A fausse, B fausse ; A vraie, B fausse) .

On dit que $\boxed{AB}$ notée $\boxed{A \wedge B}$ ou $\boxed{A \bullet B}$ est la **conjonction** (ou le **produit**) **logique** des propositions A, B. La Table de valeur de AB, ou de vérité, est :

A	B	AB
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

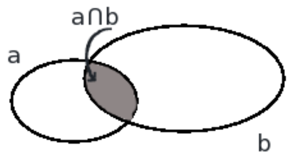
A	B	AB
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

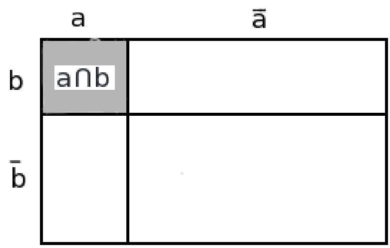
La Table de valeur ci-dessus **justifie** l'expression **« produit logique »** puisque : $0 \times 0 = 1 \times 0 = 0 \times 1 = 0$; $1 \times 1 = 1$ et, par suite la notation $\boxed{A \bullet B}$ couramment employée et même $\boxed{AB}$ comme en algèbre classique.

— ***En théorie des ensembles.***
Soit E l'ensemble des lettres du mot « **beau** » et F l'ensemble des lettres du mot « **bahut** ». Ces deux ensembles ont en commun les éléments « **a, u, b** ». On dit que l'ensemble « **a, u, b** » est l' **intersection** des ensembles E et F. Ces éléments sont ceux qui appartiennent **à la fois** à E et à F.

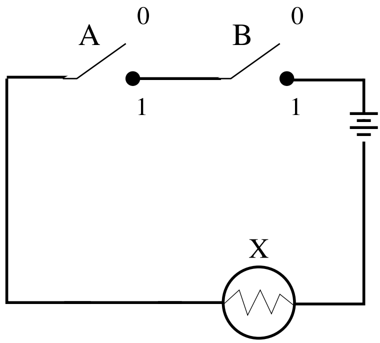
Plus généralement. si **a** est l'ensemble des éléments rendant vraie une proposition A, si **b** est celui rendant vraie une proposition B, l'intersection de **a** et **b**, notée $\mathbf{a} \cap \mathbf{b}$, (lire « **a inter b** ») rend vraie la proposition AB (produit logique de A, B).

On représente cela de l'une des manières suivantes :





— ***Circuits électriques.***
Pour que la lampe X s'allume. « faut et suffit que les **deux** interrupteurs,
lorsqu'on agit sur eux, soient simultanément sur la position 1 (figure ci-contre, ne pas oublier que les schémas sont représentés. à l'état de repos).
Autrement dit,
le circuit « **montage en série** » , correspond **au produit logique**.



$\boxed{X = AB}$

4 Savoir dire « OU ».

Remarquons d'abord que, dans le langage courant français, la conjonction « **ou** » *est ambiguë. Par exemple :*

« **fromage** ou **dessert** » *portent, parfois, les menus des restaurants. « faut alors comprendre que c'est soit l'un, soit l'autre, à l'exclusion des deux.*

« **tarif réduit aux étudiants** ou **aux adhérents du ciné-club** » ; *là « faut comprendre que l'étudiant adhérent du ciné-club a droit au tarif réduit.*

Dans le premier cas le « **ou** » est dit **exclusif** ; dans le second cas, est dit « **non exclusif** ».

Remarquons aussi qu'en ***anglais****, les deux sens du mot* ***« ou »*** *sont distingués :* ***« or »*** *ayant le sens non exclusif ;* ***« either..., either... »*** *le sens exclusif. « en est de même en allemand* ***« oder »****, sens non exclusif ; «* ***entweder..., oder... »****, sens exclusif. De même en latin :* ***« aut »****, ou exclusif ;* ***« vel »,*** *sens non exclusif.*

Le **« ou »** considéré par la suite sera **non exclusif.**

— ***En logique***.

Soit la phrase : **« Demain j'irai au cinéma ou j'irai voir l'ami Pierre »**.

Désignons par « A » la proposition **« demain j'irai au cinéma »**
« B » la proposition **« demain j'irai voir l'ami Pierre »**

La phrase considérée s'écrit alors $\boxed{\left|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right|}$. On dit que c'est la **conjonction logique** des propositions A, B.

On s'accordera à dire que A ou B est : **vraie** si, **au moins l'une** des propositions A, B est vraie (trois cas) ; **fausse** si A et B sont simultanément **fausses**.

Plus généralement, étant données deux propositions A, B, la **conjonction** A **ou** B, notée $\left|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right|$, admet les Tables de valeurs (ou de vérité ci-dessous) :

A	B	$\left\|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\|$
F	F	V
F	V	V
V	F	V
V	V	F

A	B	$\left\|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right\|$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

— **Remarque importante**.

— **La conjonction logique** $\left|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right|$, aussi nommée **produel,** est souvent notée, non sans danger, $A+B$ et, autrefois, appelée somme logique des propositions A, B. Les règles d'utilisation de ce signe + sont :

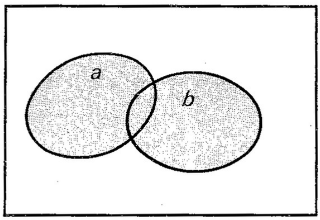
—

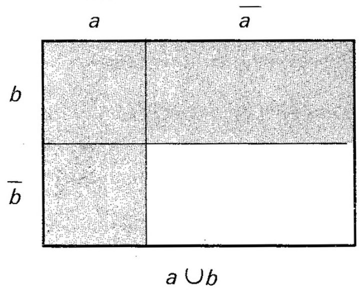
$0+0=0$ (premièreligne) $1+0=0+1=1$ (2^e et 3^e lignes) $1+1=1$ (4^e ligne).

—

Dans ce livret d'initiation, afin d'éviter toute erreur chez les débutants, nous noterons la conjonction logique « A **ou** B ». La disposition verticale, d'une part, évite la confusion avec l'opérateur + et traduit la disposition du montage parallèle (cf 4 page suivante).

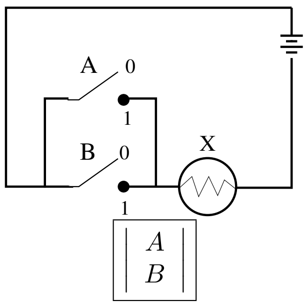
— ***En théorie des ensembles.***
  — Soit E l'ensemble des lettres du mot « **beau** » soit F l'ensemble des lettres du mot « **bahut** ». L'ensemble des lettres entrant dans l'écriture du mot « **beau** » ou du mot « **bahut** » est la **réunion** des ensembles E, F. On note E ∪ F [lire « E union (ou réunion) F] cet ensemble. Ici : E ∪ F $= \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{e}, \mathbf{h}, \mathbf{u}, \mathbf{t}\}$
  — **Plus généralement**, soit **a** l'ensemble des éléments rendant vraie une proposition A, soit **b** l'ensemble des éléments rendant vraie une proposition B ; la réunion **a∪b** est l'ensemble des éléments rendant vraie la conjonction logique$\left|\begin{array}{c} a \\ b \end{array}\right|$. Ceci se représente de l'une des façons suivantes :





— Circuits électriques.

— ***Circuits électriques.***
Pour que la lampe X s'allume il faut, et il suffit, que l'un **au moins** des interrupteurs A , B soit, quand on agit sur eux, sur !a position 1 (figure ci-contre, les interrupteurs sont à l'état de repos). Autrement dit, le « **montage en parallèle** » correspond à la **conjonction logique.**



5 Que peut-on découvrir avec deux informations ?

— D'après ce qui précède (2 page 6), avec une seule proposition A nous pouvons dire soit que Aest **vraie**, soit que A est **fausse** (ou que $\bar{A}$ est vraie). Autrement dit, à **une** proposition correspondent **deux** possibilités.
— Avec **deux** propositions A, **B**, nous avons déjà défini **deux** nouvellespropositions (et, ou). D'où se pose la question : « **Combien de propositions peut-on former avec deux propositions** » ? Autrement dit, combien de circuits, logiques ou électriques, peut-on obtenir à l'aide de deux propositions

initiales ?

Pour répondre à cette question il suffit de remplir, de toutes les façons possibles, les cases libres de la Table de valeurs ci-contre.

— ***Quelles sont ces possibilités ?***
  - — **mettre quatre 1** : un cas ;
  - — **mettre trois 1 et un zéro** : quatre cas ;
  - — **mettre deux 1 et deux zéros** : six cas ;
  - — **mettre un 1 et trois zéros** : quatre cas ;
  - — **mettre quatre zéros** : un cas.

Il ya donc **seize** possibilités.

A	B	?
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

• Devrons-nous construire seize circuits logiques différents pour exprimer, à la sortie, ces seize « programmes » ?

Non car il est aisé de montrer que ces résultats s'expriment uniquement à l'aide des circuits **« non »**, **« et »**, **« ou »** (on peut même montrer qu'ils s'expriment avec deux seulement d'entre eux).

Par exemple, d'après les résultats des paragraphes 2, 3, 4 :

— La Table I ci-dessous correspond à **« non** (A **ou** B) », soit $\overline{\left|\begin{smallmatrix}A\\B\end{smallmatrix}\right|}$.
En effet, par rapport à la Table du paragraphe 4, les 0 sont remplacés par des 1 et inversement.

— La Table II ci-dessous correspond à « (non A) ou B », soit $\left|\begin{smallmatrix}\overline{A}\\B\end{smallmatrix}\right|$

A	B	$\left\lvert\begin{matrix}\overline{A}\\B\end{matrix}\right\rvert$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0
Table I		

A	B	$\left\lvert\begin{matrix}\overline{A}\\B\end{matrix}\right\rvert$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1
Table II		

La Table III ci-dessous correspond à « **non** (A **et** B) », soit $\overline{AB}$.
En effet, par rapport à la Table du paragraphe 3, les 0 et 1 ont été échangés.

A	B	$\overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Table III

A	B	?
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Table IV ?

A quoi correspond la Table IV ci-dessus ?

Les Tables ci-dessous, construites de droite à gauche, montrent que la Table IV correspond à $\left| \begin{matrix} A\overline{B} \\ \overline{A}B \end{matrix} \right|$.

Remarquons que cette Table IV correspond au « ou exclusif » (en français : « soit..., soit...» ; de deux choses l'une, ou bien... ou bien). En effet, le résultat prend la valeur vraie (3^e et 4^e lignes) lorsque l'une des deux propositions A, B est vraie à l' **exclusion de l'autre**.

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

$\overline{B}$
1
0
1
0

$A\overline{B}$
0
0
1
0

$\overline{A}$
1
1
0
0

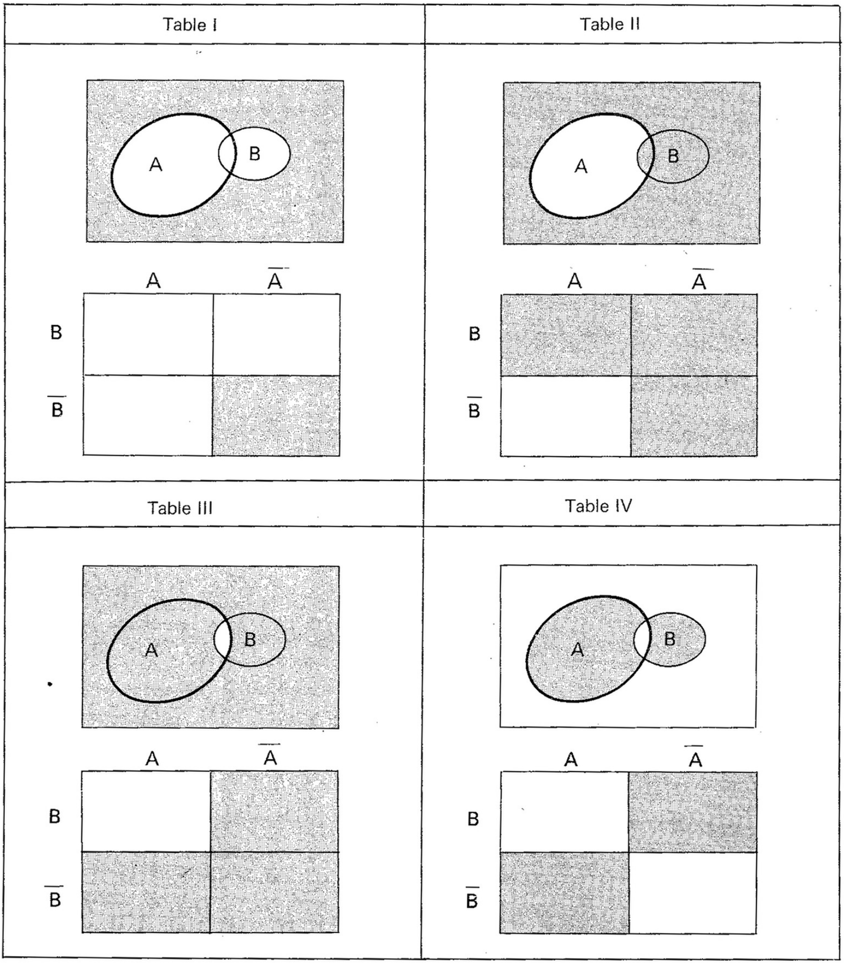
$\overline{A}B$
0
1
0
0

$\left\| \begin{matrix} A\overline{B} \\ \overline{A}B \end{matrix} \right\|$
0
1
1
0

Un bon exercice consiste à procèder de même pour chacune des **seize** tables possibles.

— Interprétations ensemblistes.

— Il est aisé d'interpréter, à l'aide des diagrammes de Venn ou de Carroll les seize propositions logiques obtenues à partir de deux propositions. Ainsi, ci-dessous, nous avons représenté les ensembles correspondants aux Tables I, II, III, IV ci-dessus.



— Un bon exercice consiste à illustrer ainsi les seize possibilités mises en évidence ci-dessus.

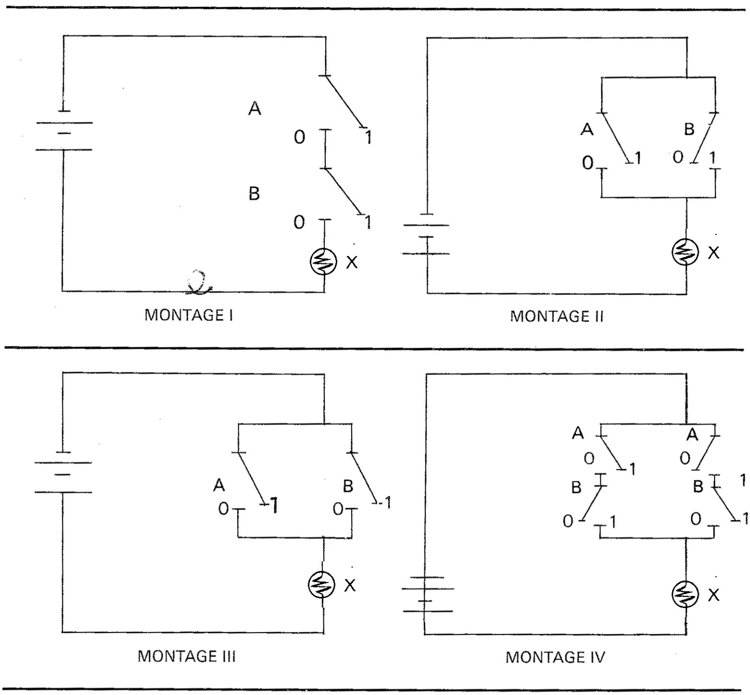
— ***Interprétations par montages électriques.***

— Rappelons que « **et** » est représenté par un **montage en série** (§3) et que « **ou** » est représenté par un montage en parallèle (§ 4).

— Les montages ci-dessous « illustrent » les quatre tables de valeurs ci-dessus. Nous laissons au lecteur le soin de procéder de même pour les autres tables.

Pour les montages I et III, il faut connaître les résultats suivants (démontrés au § 6) :

$$\overline{\left|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right|} = \overline{AB} \qquad\qquad \overline{AB} = \left|\begin{matrix}\overline{A}\\\overline{B}\end{matrix}\right|$$

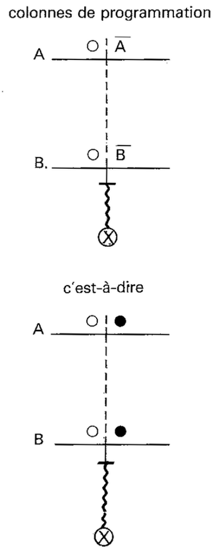


— ***Interprétations par un mini-ordinateur.***

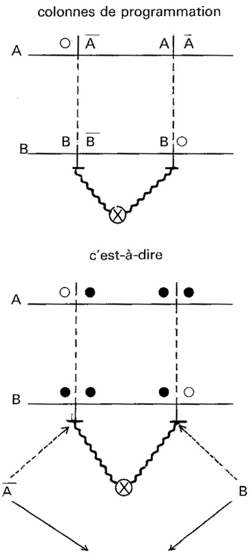
— Ces interprétations sont **immédiates** une fois que l'on sait que :

1. **à gauche** (en regardant le pupitre de l'ordinateur J.R. 01) de chaque colonne de programmation (notée de 1 à 7), une fiche enfoncée dans un trou correspond, suivant la barrette A, B, C considérée, soit à A, soit à B, soit à C (rond plein) ;
2. **à droite** de chaque colonne de programmation (dans les mêmes conditions), une fiche correspond soit à $\overline{A}$, soit à $\overline{B}$ soit à $\overline{C}$;
3. deux colonnes de programmation reliées à la même lampe de sortie correspondent à « **ou** » ;
4. pour « neutraliser » une proposition, on enfonce deux fiches de part et d'autre de la colonne de programmation.

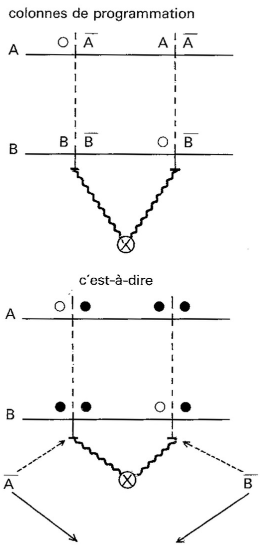
Ainsi les quatre montages indiqués ci-dessus s' **obtiendraient** sur l' ORDINATEUR J.R. 01, à l'aide des programmes I à IV ci-dessous, **s'il n'y avait que deux barrettes A et B**. En fait, la présence de la barrette C qui permet une troisième information, modifie les schémas ci-dessous car il faut « neutraliser » (ne pas tenir compte de) cette troisième barrette. Nous étudierons ceci au paragraphe 7 page 23.



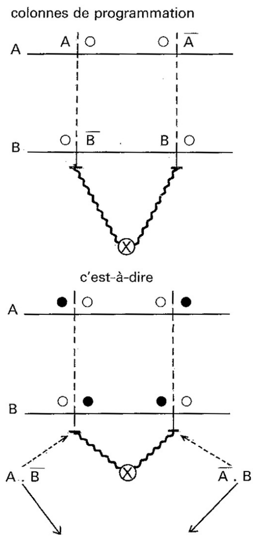
$$\boxed{X = \overline{AB}}$$



$$\boxed{\begin{vmatrix} \overline{A} \\ B \end{vmatrix}}$$



$$\boxed{\begin{vmatrix} \overline{A} \\ \overline{B} \end{vmatrix}}$$



$$\boxed{\begin{vmatrix} A\overline{B} \\ \overline{A}B \end{vmatrix}}$$

6 Algèbre de Boole pour deux propositions.

— Des relations courantes entre les seize (voir § 5) propositions que l'on peut former avec deux propositions, permettent de simplifier des expressions et, **surtout**, de simplifier les circuits électriques correspondants.
Les démonstrations des formules ci-dessous s'obtiennent soit à l'aide des diagrammes ensemblistes, soit, mieux, à l'aide des Tables de Valeurs. Nous avons indiqué, ci-dessous, à titre d'exemple, deux de ces démonstrations.

$\boxed{AB = BA}$ (1) $\boxed{\left|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}B\\A\end{matrix}\right|}$ (2)

$\boxed{\overline{AB} = \left|\begin{matrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{matrix}\right|}$ (3)

$\boxed{\overline{\left|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right|} = \bar{A}\bar{B}}$ (4)

$\left.\right\}$ Lois de dualité (ou formule de De Morgan)

$\boxed{\left|\begin{matrix}A\bar{B}\\\bar{A}B\\AB\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right|}$ (5) $\boxed{\left|\begin{matrix}A\bar{B}\\\bar{A}B\\\bar{A}\bar{B}\end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{matrix}\right|}$ (6)

$\boxed{\left|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}A\\\bar{B}\end{matrix}\right| = A}$ (7)

$\boxed{\left|\begin{matrix}A\\\bar{A}\end{matrix}\right| = 1}$ (toujours vraie) (8) $\boxed{A\bar{A} = 0}$ (toujours fausse) (9)

$\boxed{A.1 = A}$ (10) $\boxed{A.0 = 0}$ (11)

$\boxed{\left|\begin{matrix}A\\1\end{matrix}\right| = 1}$ (12) $\boxed{\left|\begin{matrix}A\\0\end{matrix}\right| = A}$ (13)

$\boxed{A\left|\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right| = A}$ (14) $\boxed{\left|\begin{matrix}A\\AB\end{matrix}\right| = A}$ (15)

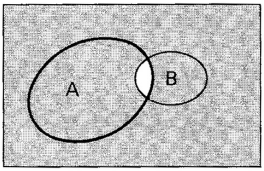
— ***Formule*** (3) .

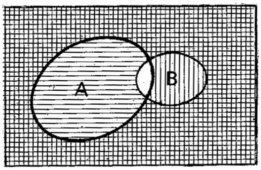
— Démontrons cette formule à l'aide des Tables de valeurs, en construisant sucessivement les Tables de AB ; $\overline{AB}$; $\bar{A}$; $\bar{B}$; $\left|\begin{matrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{matrix}\right|$ et en comparant celles de $\overline{AB}$ et $\left|\begin{matrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{matrix}\right|$.

A	B	AB	$\overline{AB}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\left\|\begin{matrix}\bar{A}\\\bar{B}\end{matrix}\right\|$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

↑ *Comparer* ↑

— Les diagrammes ci-dessus illustrent la même formule.





$\overline{AB}$

— hachures horizontales $\overline{B}$
— hachures verticales $\overline{A}$
— une sorte, au moins, de hachures $\left|\begin{array}{c}\overline{A}\\ \overline{B}\end{array}\right|$

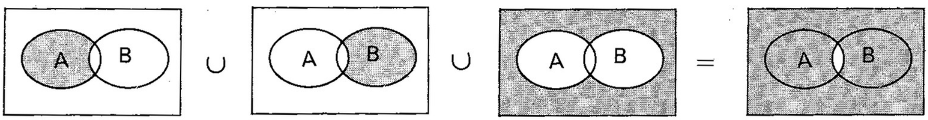
— ***Formule (6).***

— En construisant successivement les Tables de valeurs de $\overline{A}$; $\overline{B}$; $\overline{A}B$; $A\overline{B}$; $\bar{A}\bar{B}$; $\left|\begin{array}{c}\overline{A}B\\ A\overline{B}\\ \bar{A}\bar{B}\end{array}\right|$; puis celle de $\left|\begin{array}{c}\overline{A}\\ \overline{B}\end{array}\right|$, et en comparant, on obtient la formule envisagée.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}B$	$A\overline{B}$	$\bar{A}\bar{B}$	$\left\|\begin{array}{c}\overline{A}B\\ A\overline{B}\\ \bar{A}\bar{B}\end{array}\right\|$	$\left\|\begin{array}{c}\overline{A}\\ \overline{B}\end{array}\right\|$
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0

↑*Comparer*↑

— Les diagrammes ci-dessous illustrent la même formule ; on retient les zones blanches.



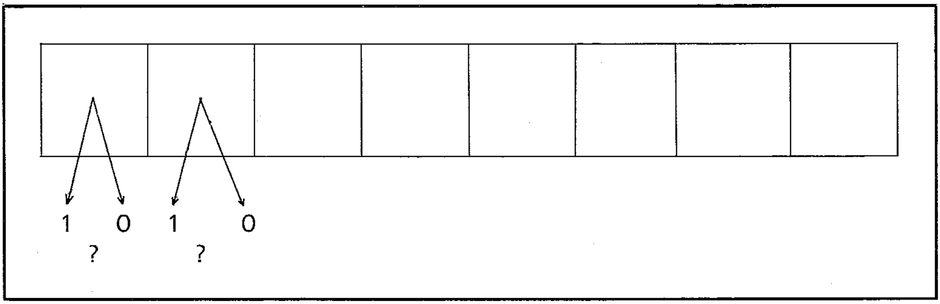
$$\left|\begin{array}{c}\overline{A}B\\ A\overline{B}\\ \bar{A}\bar{B}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\overline{A}\\ \overline{B}\end{array}\right|$$

7 Que peut-on découvrir avec trois informations ?

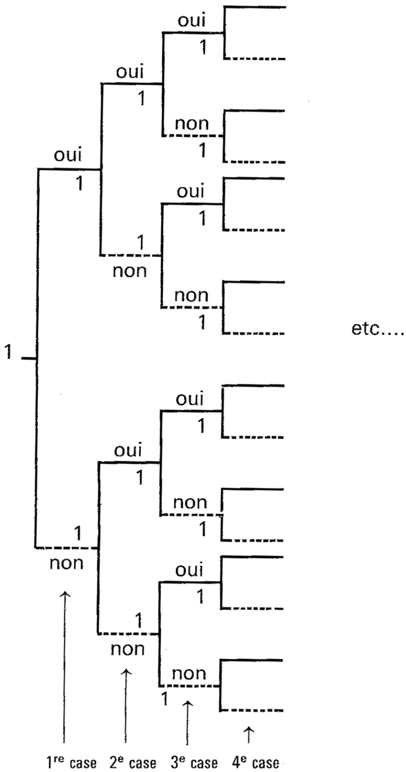
— D'après ce qui précède(§ 5),
avec **deux** informations (ou propositions) nous avons vu qu'il était possible d'écrire 16 propositions ou de construire 16 circuits électriques ou d'établir 16 raisonnements logiques. Pas un de plus, pas un de moins.
Que pouvons-nous faire avec trois informations (c'est le cas de l'ordinateur J.R. 01) ?
Notons A, B, C ces trois informations et dressons la Table de vérité qui leur est associée (cf. ci-contre).
Cette Table a 8 **lignes**. Chaque **possibilité** s'obtient en remplissant les lignes de la 4^{e} colonne de 0 ou 1, **au choix**.

A	B	C	?
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

Autrement dit, nous avons 8 cases dans chacune desquelles il faut placer un ou un 0. **Deux** choix à chaque case.



Comme il y a 8 cases, cela donne 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = **256** possibilités différentes. On peut schématiser cela de la façon suivante, en mettant **oui** si l'on prend 1, **non** si l'on prend 0.



— ***Devons-nous construire 256 circuits logiques différents pour exprimer, à la sortie, ces 256 «programmes » ?***

Non, car on démontre que tout s'exprime à l'aide uniquement de **et**, **ou**, **non**. Ainsi, par exemple, soit X le « programme », la «proposition logique », définie par la Table ci-dessous :

A	B	C	X		
0	0	0	1	$\rightarrow$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	0		
0	1	0	0		
0	1	1	1	$\rightarrow$	$\overline{A}BC$
1	0	0	0		
1	0	1	0		
1	1	0	1	$\rightarrow$	$AB\overline{C}$
1	1	1	0		

Comment exprimer X ?

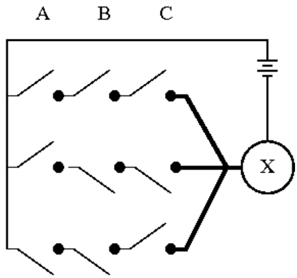
D'après les règles de calculs des **produits** et des **produels** (voir § 3 et 4il est immédiat que :

$$X = \begin{vmatrix} \bar{A}\bar{B}\bar{C} \\ \overline{A}BC \\ AB\overline{C} \end{vmatrix}$$

Cet exemple montre comment on opérera dans tous les cas.

— ***Interprétation par montages électriques.***

Si l'on se rappelle que « **et** » est obtenu par un montage en série (§ 3) de deux interrupteurs et que « **ou** » s'obtient par un montage en parallèle (§ 4), alors le « montage » ci-dessous illustre le programme X ci-dessus.



— ***Interprétations par l'ordinateur J.R. 01.***

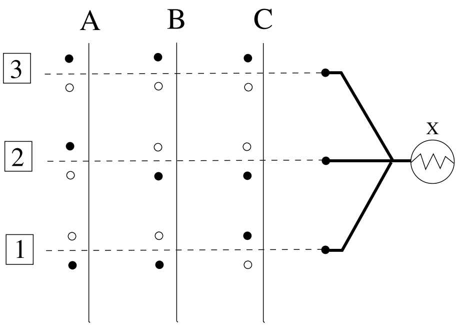
— Celles-ci sont **immédiates** dès que l'on sait que :

1. **à gauche** (en regardant le pupitre de l'ordinateur J.R. 01) de chaque colonne de programmation (notée de 1 à 7 une fiche enfoncée dans un trou correspond, suivant la barrette A, B, C considérée, soit à A, soit à B, soit à C.
2. **à droite** de chaque colonne de programmation, une fiche enfoncée correspond soit à $\overline{A}$, soit à $\overline{B}$, soit à $\overline{C}$.
3. deux **colonnes** de programmation reliées à la même lampe de « sortie » correspond à « **ou** » (c'est-à-dire à !±I).
4. si l'on enfonce une fiche de part et d'autre d'une colonne de programmation on obtient soit $A\overline{A}$, soit $B\overline{B}$ soit $C\overline{C}$, qui est toujours vraie, donc on **neutralise** soit A, soit B, soit C.

Ainsi pour programmer l'ordinateur J.R. 01 selon le programme

$$X = \begin{vmatrix} \bar{A}\bar{B}\bar{C} \\ \overline{A}BC \\ AB\overline{C} \end{vmatrix}$$

— on choisira trois colonnes de programmation, par exemple celles marquées 1, 2, 3 ;
— on reliera ces colonnes à la lampe X ;
— sur la colonne 1, on enfonce trois fiches : une **à gauche** sur A, une **à gauche** sur B, une **à droite** sur C (pour obténir $AB\overline{C}$) ;
— sur la colonne 2, on enfonce trois fiches : une **à droite** sur A, une **à gauche** sur B, une à **gauche** sur C (pour obtenir $\overline{A}BC$)
— sur la colonne 3, on enfonce trois fiches : une **à droite** sur A, **a droite** sur B, une **à droite** sur C ($\bar{A}\bar{B}\bar{C}$).
On obtient alors le programme ci-dessous (un rond plein indique une fiche enfoncée ; un rond « évidé » indique une absence de fiche).
Vérifié-le ! Pour cela :



— Vous pouvez vous exercez ! Par exemple, écrivez la proposition définie par la Table ci-contre.
Construisez le programme correspondant sur l'ordinateur J .R. 01. Vérifiez-le.
— Donnez-vous une autre Table de valeur et faites de même.

A	B	C	X
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

8 Algèbre de Boole pour trois propositions.

— Deux relations courantes entre les 256 propositions que l'on peut former avec trois propositions, permettent de simplifier certaines expressions et, surtout, de simplifier les circuits électriques correspondants. Ces formules sont :

$$\left|\begin{array}{c} AB \\ C \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} A \\ C \end{array}\right|\left|\begin{array}{c} B \\ C \end{array}\right| \qquad\qquad A\left|\begin{array}{c} B \\ C \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} AB \\ AC \end{array}\right|$$

Les démonstrations des formules ci-dessus s'obtiennent soit à l'aide des diagrammes ensemblistes soit, mieux, à l'aide des Tables de valeurs (voir ci-dessous et page suivante).

— *Démonstration de la première formule.*

A	B	C	$\left\|\begin{array}{c} A \\ C \end{array}\right\|$	$\left\|\begin{array}{c} B \\ C \end{array}\right\|$	AB
0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

$\left\|\begin{array}{c} AB \\ C \end{array}\right\|$
0
1
0
1
0
1
1
1

$\left\|\begin{array}{c} A \\ C \end{array}\right\|\left\|\begin{array}{c} B \\ C \end{array}\right\|$
0
1
0
1
0
1
1
1

↑*Comparer*↑

— Démonstration de la deuxième formule.

A	B	C	AB	AC	$\left\|\begin{array}{c} B \\ C \end{array}\right\|$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

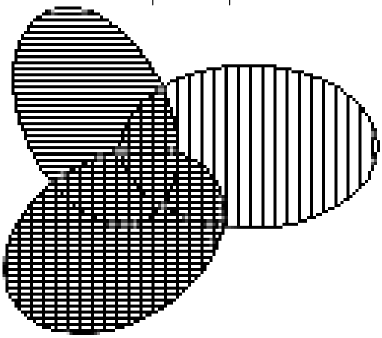
$A\left\|\begin{array}{c} B \\ C \end{array}\right\|$
0
0
0
0
0
1
1
1

$\left\|\begin{array}{c} AB \\ AC \end{array}\right\|$
0
0
0
0
0
1
1
1

↑*Comparer*↑

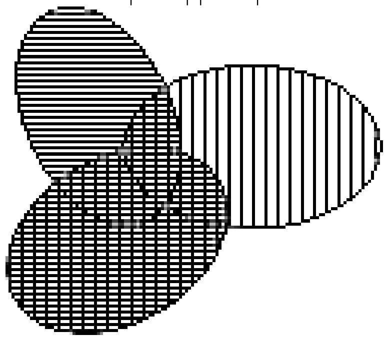
— Interprétations ensemblistesJvoir aussi page 25).

$\left|\begin{matrix}AB\\C\end{matrix}\right|$



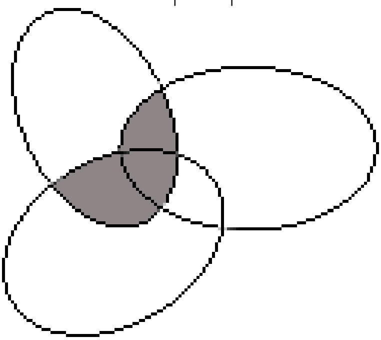
$\equiv$ représente $\left|\begin{matrix}A\\C\end{matrix}\right|$

$\left|\begin{matrix}A\\C\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}B\\C\end{matrix}\right|$

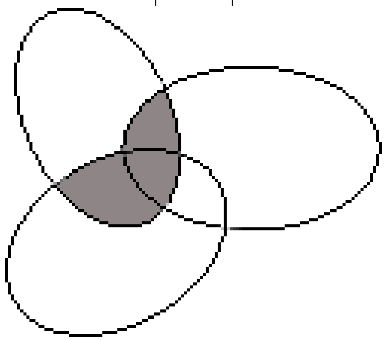


$||||$ représente $\left|\begin{matrix}B\\C\end{matrix}\right|$

$A\left|\begin{matrix}B\\C\end{matrix}\right|$



$\left|\begin{matrix}AB\\AC\end{matrix}\right|$



9 De plus en plus fort...

— Puisque l'ordinateur J. R. 01 travaille, et joue, avec trois informations ce qui précède suffit pour aborder la deuxième partie de ce livret.
Mais qui n'aura pas la curiosité de connaître...la suite.
Que peut-on dire avec n informations ?
— D'abord, combien la Table de valeurs associée à n propositions a-t-elle de lignes ?

Une proposition	:	2 lignes ;	deux propositions	:	4 lignes ;
trois propositions	:	8 lignes ;	quatre propositions	:	16 lignes ;
... n propositions	:	2^n lignes.			

— Dans chaque ligne, on place, de façon arbitraire, un 1 ou un 0. Quel est le nombre de ces façons ?

Si nous avons N cases dans lesquelles il faut placer un 1 ou un 0, le nombre de possibilités est 2^N.

Or ici $N = 2^n$.

Donc :

avec n propositions, on peut tenir $2^{(2^n)}$ « discours » différents.

Ainsi :

si **n** $= 2$, $2^2 = 4$, $2^{2^n} = 2^4 = 16$ (§ (5))
si **n** $= 2$, $2^3 = 8$, $2^{2^n} = 2^8 = 256$ (§ (7))
si **n** $= 2$, $2^4 = 16$, $2^{16} = 65.536...$
si **n** $= 2$, $2^5 = 32$, $2^{32} = 4.294.967.296$

avec 5 informations, « y a plus de **4 milliards** de possibilités de « réponses ».

10 Le système binaire.

1. **Le problème de la numération.**

Ce problème consiste à écrire et nommer tous les nombres entiers. Pour cela il est nécessaire de posséder un nombre fini de symboles représentant certains d'entre eux et permettant d'obtenir tous les autres.

Alors apparaissent deux contraintes contradictoires :

— si l'on a beaucoup de symboles initiaux, alors l'écriture (le **codage**) de tous les autres entiers sera simplifié mais il faut connaître une liste importante de « noms » et de « symboles » ;

— si l'on a peu de symboles initiaux, alors l'écriture (le **codage**) de tous les autres entiers sera longue.

Ainsi dans la **numération romaine**,

les **symboles** étaient :	I	V	X	L	C	D	M
	un	cinq	dix	cinquante	cent	cinq cents	mille

et les **règles** étaient :

(a) tout symbole placé immédiatement **à droite** d'un symbole supérieur s'ajoute à ce dernier :
EXEMPLE : XVI *seize* ou DIX + CINQ + UN

(b) tout symbole placé immédiatement **à gauche** d'un symbole strictement supérieur se soustrait de ce dernier ;
EXEMPLE : IX *neuf* ou DIX - UN

(c) tout symbole placé entre deux symboles strictement supérieur se retranche de celui de droite ;
EXEMPLE : CIV *cent quatre* ou CENT + CINQ - UN

(d) les unités des classes supérieures sont soulignées une fois pour les mille, deux fois pour les millions, etc.

EXEMPLE : $\overline{\overline{I}D}$ UN MILLION CINQ CENT MILLE.

Que de complications ! Imaginez d'effectuer une addition, une multiplication, une division surtout avec deux entiers codés en numération romaine...

Un des inconvénients de la numération romaine apparaît immédiatement : **un symbole représente toujours le même entier quelle que soit la place de ce symbole**. Il en résulte qu'il faut utiliser la règle (d) pour obtenir des « unités d'ordre supérieur ».

C'est pour éviter cet inconvénient que les numérations utilisées maintenant sont des **numérations de position** : cela signifie qu'un même **symbole représente différents entiers suivant la place qu'il occupe dans l'écriture d'un nombre**.

2. **Numération décimale.**

Elle utilise **dix** symboles, appelés **chiffres** :

écrits	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
lus	zéro	un	deux	trois	quatre	cinq	six	sept	huit	neuf

Ensuite, l'entier suivant contient une **dizaine** et zéro unité.

Il s'écrit donc 10 (lire **dix**).

On obtient alors, successivement, 11 , 12.... 19.

Après ? deux dizaines et zéro unité, soit 20 (lire **vingt**), etc...

Les « calculs » s'effectuent à l'aide des tables d'addition et de multiplication ci-dessous (la somme **a** + **b** ou le produit **a** × **b**, s'obtiennent à l'intersection de la colonne de **a** avec la ligne de **b**).

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	6
3	0	3	6	9
4	0	4	8	12
5	0	5	10	15
6	0	6	12	18
7	0	7	14	21
8	0	8	16	24
9	0	9	18	27

3. **Numération binaire.**

(a) ***Écriture d'un entier***,

Elle utilise deux symboles (chiffres) notés 0, 1 (lus « **zéro** » et « **un** »).

Ensuite : **deux** est formé d' **une paire** et de **zéro** unité. il est donc **codé** 10 (lire « **un, zéro** » ;

trois est formé d'une paire et **une** unité. « est donc codé 11 (lire « **un, un** »).

On obtient donc la correspondance suivante :

Système décimal		**Système binaire**
0	0	
1	1	
1	10	
3	11	
4	100	(lire « **un, zéro, zéro** »)
5	101	
6	110	
7	111	
8	1000	
9	1001	(lire « **un, zéro, zéro, un** »)

Remarque

Un entier **s'écrira** simplement en système binaire... à l'aide de lampes allumées (pour 1) ou éteintes (pour zéro).

éteintes (pour zéro).

Ainsi, avec quatre lampes, on pourra écrire les nombres suivants (rond noir : lampe éteinte ; rond blanc : lampe allumée).

(b) ***Addition***

La table d'addition est d'une simplicité extrême, puisque :

$0 + 0 = 0 \quad 1{+}0 = 0 + 1 = 1$

et $1 + 1 = 10$

Par suite, toutes les **additions** d'entiers écrits en système binaire sont d'une extrême simplicité (on commence toujours par les chiffres de droite).

Exemple :

d'où $110 + 111 = 1101$

+	0	1
0	0	1
1	1	10

En système binaire, les multiplications sont d'une simplicité exemplaire puisque

la Table de multiplication se réduit à

o X 0=0 1 x 0= 0 x 10

et 1x1=1

La disposition pratique pour effectuer une multiplication est, bien sûr, la même que dans le système décimal.

Exemple : 110x11 = ?

1

Multiplication

En système binaire, les multiplications sont d'une simplicité exemplaire puisque

la Table de multiplication se réduit à

o X 0=0 1 x 0= 0 x 10

et 1x1=1

La disposition pratique pour effectuer une multiplication est, bien sûr, la même que dans le système décimal.

Exemple : 110x11 = ?

1

1. 4° Comment coder en numération décimale un nombre écrit en numération binaire ?

   Soit, par exemple, a = 11101. Cela signifie a = 10000 + 1000 + 100 + 1 Or, d'après ce qui précède, 10—>

   2 100—>

   4= 22 1000 -7

   8= 23 10000 —>

   16 = 24 Parsuite, a=16+8+4+1soita=29 Autrement dit, « suffit de connaître les puissances successives de deux. C'est

   pour cela que le système binaire est aussi appelé système à base deux. Remarque : Le système décimal est à base dix. En effet, si b = 1971 cela signifie b= 1000+9 x100+7x 10+1 soit b= 103+9 .10Z

   +7 .10+1

   (a) 5° Problème inverse : Comment écrire en système binaire un nombre écrit en base dix ?

   D'après ce qui précède, « suffit de le décomposer en une somme de puissances de 2. Pour cela, « suffit, pratiquement de diviser le nombre donné par 2 (pour obtenir le nombre de paires),

   le reste donne le nombre d'unités restantes ;

   -puis diviser le quotient obtenu par 2 (pour obtenir le nombre de « quadrilles » , le reste donnera le nombre de paires restantes ;

   -puis le quotient obtenu sera divisé encore par 2 (pôur obtenir le nombre, .. {(d'octaves »),

   le reste donnera le nombre de « quadrilles » restants ; etc...

   Exemple : Ecrire 47 en base deux.

1’" méthode : 47=32+8 +4 +2 + 1
donc, 47 = 1_˜
_ _0
(car’ « n’y a pas 16 = 24)
Remarque :
On peut «vérifier »,
dans le système décimal, les opérations effectuées ci-dessus dans le système binaire (page précédente).
-Addition 110 + 111
En décimal : 110 –>
6 111
Or 6+7= 13 et 13=8+4+ 1
= 23 + 22 + 1
et 13 –>
1101
-Multiplication 110 x 11
En décimal : 100 –>
6 1’1
–>
3
Or 6 x 3= 18 et 18= 16+2+1
=24 +2 + 1
Soit 18 –>
10010 (il « manque» 23, 22, et « n’y a pas «d’unité »).
6° Et l’ordinateur J.R. 01 ?
Bien qu’il ne soit pas un «calculateur» rapide (l’introduction des données, à l’entrée, se faisant «à la main »),
le J. R. 01 est capable d’effectuer des additions et
des multiplications.
-Pour une addition de deux nombres ; on les écrit en système binaire ; on programme l’ordinateur J.R. 01 comme indiqué ci-dessous ; on introduit le dernier
29
chiffre, de droite, (0 ou 1) du premier nombre à l’aide de la barrette B, celui du deuxième nombre à l’aide de la barrette C. La lampe X allumée donnera 1, éteinte O. On écrit le chiffre indiqué. C’est le dernier chiffre de droite de la somme. La lampe Z allumée indique qu’il faut reporter 1 à l’aide de la barrette A.

On recommence... C'est-à-dire qu'on introduit les chiffres suivants des nombres à additionner. Et le processus se poursuit...

x Z (à reporter en A)

-Pour une multiplication, on revient à une addition en confiant â l'ordinateur

J.R. 01 le soin de faire les totaux des produits partiels (110 + 1100 dans l'exemple ci-dessus).

** *

...