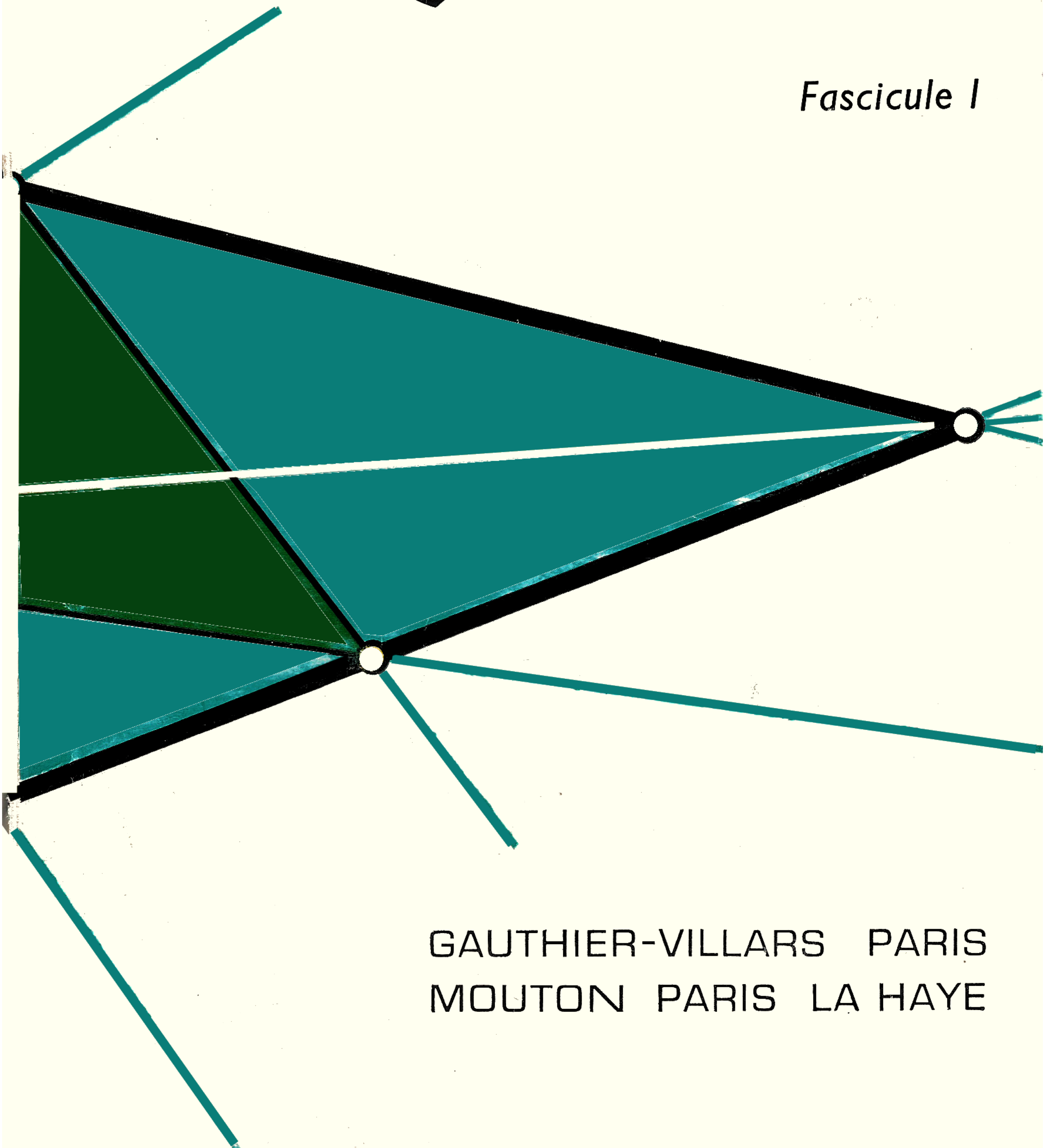
MATHEMATIQUES ET SCIENCES DE L'HOMME

JEAN-BLAISE GRIZE

LOGIQUE MODERNE

Fascicule I



GAUTHIER-VILLARS PARIS
MOUTON PARIS LA HAYE

Chapitre 1

La logique des propositions inanalysées

L'idée naïve de déduction

1.1 Un exemple de déduction

Nous allons chercher, dans ce premier chapitre, à dégager un certain nombre de règles de déduction et à les exprimer de façon précise et commode. Partons pour cela d'une déduction simple, telle qu'elle se présente dans le discours quotidien.

« Si le ciel se couvre, il ne gèlera pas et s'il ne gèle pas, le chien peut rester dehors pour la nuit. Le ciel se couvre. Donc le chien pourra rester dehors ».

Il faut tout d'abord remarquer que, d'un point de vue tout extérieur, nous avons affaire à une suite de propositions. Cherchons donc à les énumérer. Nous nous heurtons immédiatement à une difficulté : certaines sont au présent, d'autres au futur. Faut-il compter « il ne gèlera pas » comme une proposition et « il ne gèle pas » comme une autre ou, au contraire, puisque toutes deux ont trait au même fait, faut-il n'en compter qu'une ? D'autre part, « le chien peut rester dehors pour la nuit » contient deux verbes, « peut » et « rester ». S'agit-il d'une ou de deux propositions ?

Ces quelques remarques montrent que, aussitôt que l'on s'efforce de tirer au clair des procédures pourtant familières, on se met dans l'obligation d'effectuer certains choix plus ou moins arbitraires et d'effectuer un certain nombre de simplifications. Le fait est d'importance, en ce sens qu'il manifeste l'autonomie du système que l'on a l'intention de construire. En droit, en effet, nous sommes entièrement libres de nous donner les règles de déduction que nous voulons. De même que le géomètre, qui crée des êtres abstraits à l'aide de ses lignes sans épaisseur et de ses points sans dimension, peut les doter des propriétés qui lui plaisent, de même nous pouvons, si nous le voulons, attribuer aux objets abstraits que nous allons appeler des propositions n'importe quelles propriétés. Toutefois ce n'est encore qu'un aspect de la situation. Le géomètre souhaite que les objets qu'il crée puissent admettre certains modèles concrets (des figures dessinées à l'encre, par exemple). Quant à nous, nous désirons que ce que nous nommerons « propositions » ait quelque chose à voir avec les propositions que nous énonçons en parlant chaque jour.

C'est la raison pour laquelle notre démarche, dans ce premier chapitre, sera la suivante :

1. Examiner certains emplois attestés,
2. En retenir quelques-uns, soit que nous les supposions particulièrement importants en pratique, soit qu'ils conviennent à notre construction pour des raisons propres au logicien,
3. Oublier l'origine pratique de notre choix et nous en tenir strictement à ce que nous aurons posé,
4. Interpréter le système obtenu dans les termes concrets qui lui auront servi d'origine.

Dans la construction de la géométrie, le point 1 correspond à l'examen quasi-physique des propriétés des objets, plus ou moins bien dessinés ; le point 2 au choix des axiomes et des postulats ; le point 3 au déroulement du système de la géométrie et le point 4, enfin, à l'application de la géométrie à la réalité concrète.

Ceci dit, nous allons prendre notre première décision en postulant que nous ne tiendrons pas compte des diverses formes des verbes, non plus d'ailleurs que d'autres différences stylistiques qui pourraient se présenter. En fait, notre décompte sera sensiblement celui des « phrases-noyaux » de Chomsky.

Reste la question de savoir comment découper les propositions. Puisque, à ce stade, nous procédons intuitivement, donnons-nous un critère, lui aussi intuitif. Sera réputée proposition unique, celle qui est susceptible d'être dite vraie ou fausse. Ainsi, il n'y a aucun sens à dire que « le chien peut » est vraie ou fausse, tandis qu'il y en a un à le dire de « le chien peut rester dehors pour la nuit ». Cette dernière expression sera donc comptée comme une seule proposition.

Finalement nous aurons donc affaire à trois propositions, que nous allons abréger par les lettres p, q et m :
p : le ciel se couvre
q : il ne gèle pas
m : le chien peut rester dehors pour la nuit.

La déduction prend alors la forme abrégée suivante : « Si p alors q et si q alors m. p. Donc m. »

Nous voyons maintenant qu'il est possible de partager nos propositions en deux espèces. Les unes sont simples : p, m. Les autres sont composées : si p alors q et si q alors m. Nous appellerons les premières *des propositions atomiques* et les secondes des *propositions composées* ou *moléculaires*. Mais composées comment ?

On le voit : à l'aide de propositions atomiques (p, q et m) et des mots « si ... alors » et « et ».

Remarque

> Le caractère atomique d'une proposition est relatif et dépend largement des décisions que l'on prend. Ainsi, nous avons décidé de considérer « il ne gèle pas » comme un atome. Mais rien ne nous aurait empêché de choisir « il gèle » pour atome et de faire de « il ne gèle pas », donc de « non il gèle » une proposition moléculaire, composée de la négation « non » et de l'atome « il gèle ».

Reste à nous occuper du caractère déductif de l'exemple. Pour mieux le faire ressortir, écrivons les choses comme suit :

$$\begin{array}{r|l} 1 & \text{Si } p \text{ alors } q \text{ et si } q \text{ alors } m \\ 2 & p \\ \cline{2-2} 3 & m \end{array}$$

Les propositions 1 et 2, séparées de la proposition 3 par une petite barre horizontale, constituent les *hypothèses* de la déduction. La proposition 3 en est la *conclusion.* La ponctuation, qui séparait « si p alors q et si q alors m » de « p » et « p » de « Donc m » n'est ici plus nécessaire, puisque les propositions sont écrites individuellement les unes au-dessous des autres. Quant au mot « *Donc* », il est représenté par la petite barre horizontale.

Remarque

On dit aussi que m est déduite de la classe d'hypothèses {si p alors q et si q alors m, p}.

1.2 Règles générales

Les règles de déduction doivent pouvoir s'appliquer à n'importe quelles propositions, atomiques ou composées. Nous n'allons donc pas les formuler en utilisant des propositions particulières comme « le ciel est couvert » ou « il ne gèle pas », même si celles-ci sont abrégées par des lettres p et q. De même qu'en algèbre on utilise des variables, x, y, etc., pour désigner des nombres et que celles-ci ne sont pas des nombres, de même nous allons introduire des variables pour désigner des propositions. Nous utiliserons des majuscules : P, Q, M et ces mêmes lettres affectées d'accents P', Q', etc. Ces lettres prennent leurs valeurs sur l'ensemble des propositions, ce qui signifie qu'elles désignent des propositions, atomiques ou composées, sans être elles-mêmes des propositions. On les nomme *variables syntaxiques* ou *métavariables.*

Exemple : Dans la déduction du paragraphe précédent, P pourrait prendre la valeur « si p alors q et si q alors m », Q la valeur p et M la valeur m.

Remarque

Si une même métavariable figure plusieurs fois dans un contexte donné, il est entendu qu'elle désigne chaque fois la même proposition. En revanche, deux métavariables différentes peuvent désigner soit deux propositions différentes, soit la même proposition.

Règle hyp

Toute déduction part d'une classe de prémisses et on ne voit pas ce qui limiterait la liberté qu'a l'esprit de considérer n'importe quelles propositions pour en examiner les conséquences. Nous allons donc nous donner le droit de poser, sans restrictions, des hypothèses quelconques. Toutefois, il faut savoir exactement de quelles hypothèses dépend la déduction. On peut imaginer toutes sortes de procédés pour ne pas l'oublier. Celui adopté ici, un trait vertical qui court tout au long de la déduction et une petite barre horizontale sous la dernière hypothèse, est emprunté à F. B. Fitch et il se révèle particulièrement commode. Aussi allons-nous poser la règle suivante :

Règle hyp : On peut, à toute étape d'une déduction, introduire une ou plusieurs hypothèses, à condition de les accompagner d'un trait vertical à gauche et de faire suivre la dernière d'une petite barre horizontale.

Exemple :

1	P			hyp
2	Q			hyp
k		M		hyp
l			P'	hyp

Les nombres 1, 2, . . . , k, l qui figurent à gauche servent à numéroter les lignes de la déduction. Pas plus que l'abréviation « hyp », qui indique au nom de quelle règle la proposition est posée, ils n'appartiennent à la déduction. Ce sont des indications à soi-même ou au lecteur.

Règle rep

Toute déduction exige d'écrire des propositions les unes à la suite des autres et se déroule donc dans le temps. Il s'agit toutefois là d'un aspect matériel et contingent. En fait, la déduction elle-même a un caractère atemporel, ce qui fait que toute proposition, une fois posée, le reste tout au long de la déduction.

Nous tiendrons compte de ce double fait - une proposition vraie le reste, mais nous sommes obligés de procéder dans le temps - en nous accordant le droit de répéter, n'importe où dans la déduction toute proposition qui la précède. Et nous noterons :

Règle rep (règle de répétition) :

$$\begin{array}{r|l} n & P \\ & \dots \\ & P \end{array}$$

Dans le langage quotidien, cette règle correspond à des locutions telles que « comme on l'a vu plus haut », « mais on sait que », etc.

Règle reit

Nous ne voulons pas, ici, limiter le droit à la répétition. Toutefois d'un point de vue formel, nous pouvons nous trouver en présence de deux situations distinctes. Soit la déduction suivante :

$$\begin{array}{r|l|l|ll}
1 & \multicolumn{3}{l}{P} & \text{hyp} \\ \cline{2-2}
2 & \multicolumn{3}{l}{P} & \\
3 & & \multicolumn{2}{l}{Q} & \text{hyp} \\ \cline{3-3}
4 & & \multicolumn{2}{l}{P} & \\
5 & & & M & \text{hyp} \\ \cline{4-4}
6 & & & P &
\end{array}$$

La proposition$P$ a été « répétée » trois fois : lignes 2, 4 et 6. Aux lignes 4 et 6, elle est « répétée » à l'intérieur d'une *sous-déduction* de la déduction principale, mais à la ligne 2 elle est « répétée » dans la déduction principale elle-même. On peut dire aussi que pour écrire P aux lignes 4 et 6, il a fallu franchir une (ou plus d'une) barre verticale, ce qui n'est pas le cas pour la ligne 2. Pour des raisons qui apparaîtront dans la deuxième partie de ce fascicule, il est utile de distinguer les deux cas. Nous parlerons de *répétition* (règle rep) à la ligne 2 et de *réitération* aux lignes 4 et 6 (règle reit).

Règle reit :

$$\begin{array}{r|l|ll} n & \multicolumn{2}{l}{P} & \\ & \multicolumn{2}{l}{\dots} & \\ & & P & n, \text{ reit} \end{array}$$

Règle repdf

Il est très souvent commode, et même pratiquement indispensable, d'abréger certaines expressions. Ainsi, au lieu de « lieu géométrique des points équidistants d'un point fixe » est-il usuel de dire « circonférence ». Le mot « circonférence » abrège l'expression « lieu géométrique… », il a la même signification. « Circonférence » est le *défini* et « lieu géométrique… » est le *définissant*. Nous désignerons par le signe complexe, mais qui doit être considéré comme un tout, =df la relation qui unit le défini et le définissant.

Exemples :

ONU	=df	Organisation des Nations Unies
p	=df	le ciel se couvre

Nous nous donnerons alors la règle de répétition par définition sous les deux formes suivantes :

Règle repdf

Si Q =df P :

$$\begin{array}{l|ll} n & P & \\ & \dots & \\ & Q & n\text{, repdf} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l|ll} n & Q & \\ & \dots & \\ & P & n\text{, repdf} \end{array}$$

Remarque

Cette règle correspond aux expressions courantes « en d'autres termes », « plus simplement », etc.

Nous avons dit qu'à ce niveau d'analyse, nous aurions affaire à des propositions considérées comme des touts et reliées entre elles par des conjonctions ou des locutions conjonctives. Ainsi nous nous trouverons en présence d'expressions de la forme : P, Q, P *et* Q, P *ou* Q, *si* P *alors* Q, pour prendre quelques exemples.

Toute proposition de ce genre peut nous servir d'hypothèse (règle hyp) et être répétée de diverses façons (règles rep, reit, repdf). Ceci est toutefois bien insuffisant pour obtenir des déductions qui pourront s'interpréter de façon utile. Nous devons encore apprendre à composer les propositions entre elles et, lorsqu'elles sont complexes (ou moléculaires) à les décomposer. Nous allons donc chercher deux catégories de règles :

1. Des règles d'introduction qui permettront d'introduire dans les conclusions certains signes de liaison qui ne figuraient pas dans les prémisses.

   Exemple : Une de nos règles posera (1.4) qu'à partir des deux prémisses P, Q, nous avons le droit de poser la conclusion : P *et* Q. La règle aura introduit la conjonction « et ».

2. Des règles d'élimination qui permettront d'éliminer certaines liaisons qui figuraient dans les prémisses.

   Exemple : Une de nos règles posera (1.3) qu'à partir des deux prémisses P et *si* P *alors* Q, nous sommes en droit d'écrire la conclusion Q. La règle aura éliminé la locution « si ... alors ».

1.3 La proposition conditionnelle

Nous appellerons (proposition) *conditionnelle* toute proposition de la forme

si P alors Q,

étant entendu que P et Q désignent des propositions soit atomiques, soit moléculaires.

Exemples

[1] Si le nombre n est divisible par 6, alors il est pair.

[2] S'il pleut dimanche, le match n'aura pas lieu.

[3] «111es condamne dans Jansénius, si elles y sont» (Pascal).

[4] S'il est vraiment courageux, alors si le fantôme apparaît, il s'en moquera.

[5] Si j'avais su, je ne serais pas venu !

[6] S'il réussit ses examens, je mange mon chapeau.

Les exemples [2] et [3] fournissent des variations linguistiques de « si ... alors ». Mais il convient toujours de distinguer deux propositions :

celle qui suit le mot « si », qui constitue l'*antécédent* de la conditionnelle, l'autre, qui en est le *conséquent*.

Au lieu d'écrire une proposition conditionnelle sous la forme : « si proposition antécédente, alors proposition conséquente », nous introduirons le signe « $\supset$». Ainsi, en posant :

p	=df	il pleut dimanche
q	=df	le match n'aura pas lieu,

on aura pour l'exemple [2] : $p \supset q$.

Remarque

> Certains auteurs écrivent $p \to q$ ou $p \Rightarrow q$, là où nous écrivons $p \supset q$. Peu importe d'ailleurs, ces signes sont tous de foncteurs propositionnels. Ils désignent une opération, celle qui, appliquée à deux propositions, fournit une troisième proposition, une conditionnelle.

Le quatrième exemple pose un problème. Si nous ne prêtons pas trop d'attention à la ponctuation, nous sommes enclins à l'écrire :

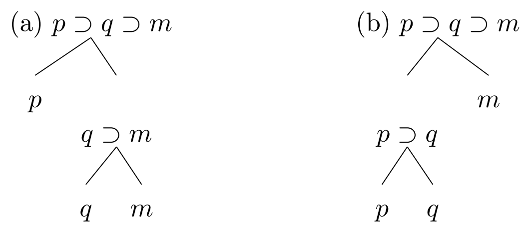
$p \supset q \supset m,$

les lettres p, q et$m$ ayant une signification évidente. Sous cette forme cependant, la proposition est ambiguë. Il est en effet possible de l'analyser de deux façons :

(a) $p \supset Q$ où Q désigne $p \supset m$

(b) $P \supset m$ où P désigne $p \supset q$.

Ces deux analyses correspondent aux arbres suivants :



Pour lever de telles ambiguïtés, nous userons de parenthèses, sans d'ailleurs prendre ici la peine d'en fixer précisément le maniement (voir le Fascicule 3). Nous interpréterons l'exemple [4] de la façon suivante :

$$p \supset (q \supset m),$$

ce qui correspond donc à la forme (a).

Enfin, les exemples [5] et [6] apparaissent rapidement transmettre un tout autre genre d'information que les quatre premiers. Ceux-ci correspondent, très sommairement, à la situation suivante. On sait (ou on décide) que dans le cas où les circonstances décrites par l'antécédent P se réaliseront, alors les circonstances décrites par le conséquent Q se réaliseront aussi. En revanche, on ne sait pas actuellement ce qu'il en est de P et c'est même la raison pour laquelle on dit « *si P alors Q* ».

Il en va tout autrement pour l'exemple [5] où celui qui parle ne sait que trop que l'antécédent P n'a pas été réalisé et dans l'exemple [6] où le locuteur s'attend si peu à ce que l'antécédent P se vérifie qu'il est disposé à promettre n'importe quoi.

Les règles que nous allons poser s'inspireront du premier usage de « si… alors » (exemples [1] à [4]) et nullement des deux autres. C'est ainsi que nous poserons, pour éliminer le signe « $\supset$ », la règle d'élimination suivante :

Règle ⊃ e

	$P \supset Q$	
m	P	
	$\ldots$	
	Q	n, m, ⊃e

Le trait pointillé indique que les propositions numéros n et m ne sont pas nécessairement des hypothèses (au sens de la règle hyp), mais servent de *prémisses* à la règle ⊃ e. Cette règle est aussi classiquement nommée règle du *modus ponens*.

Exemples

[1]

1	$p \supset q$	hyp
2	$q \supset m$	hyp
3	p	hyp
4	q	1, 3, ⊃e
5	m	2, 4, ⊃e

[2]

1	p	hyp
2	$p \supset (p \supset q)$	hyp
3	$p \supset q$	2, 1, ⊃e
4	q	3, 1, ⊃e

Dans les deux cas nous avons, en utilisant exclusivement les règles que nous nous sommes données, déduit une conclusion d'une classe d'hypothèses. Nous savons déjà que nous pouvons noter :

Ex. 1 m est déduite de la classe d'hypothèses $\{ p \supset q, q \supset m, p \}$

Ex. 2 q est déduite de la classe d'hypothèses $\{ p, p \supset (p \supset q) \}$

Il sera commode de noter les mêmes faits sous la forme abrégée suivante :

Ex. 1 $p \supset q, q \supset m, p \vdash m$

Ex. 2 $p, p \supset (p \supset q) \vdash q$

Examinons maintenant la façon d'introduire un signe et pour cela reprenons l'exemple [1]. Si quelqu'un cherche à établir la proposition conditionnelle « si le nombre n est divisible par 6, alors il est pair », il pourra procéder approximativement de la manière suivante :

1. Le nombre n est divisible par 6	hypothèse
2. 6 = 3.2	arithmétique
3. Le nombre n est divisible par 3.2	1, 2, raisonnement
4. Le nombre n est divisible par 3 et par 2	3, arithmétique
5. Le nombre n est divisible par 2	4, raisonnement
6. Le nombre n est pair	5, définition

Introduisant alors l'hypothèse faite et la conclusion obtenue *dans une même proposition*, il dira : « Si le nombre n est divisible par 6, alors il est pair ».

Nous allons, quant à nous, accepter ce genre de procédure et poser, pour introduire un signe , la règle suivante :

Règle $\supset$i

$$\begin{array}{r|l|l}
n & \quad \underline{P} & \text{hyp} \\
 & & . \\
m & \quad Q & . \\
 & P \supset Q & n-m, \supset\text{i}
\end{array}$$

Le trait vertical de gauche indique que la règle est utilisable au cours d'une déduction quelconque. Le second trait vertical découle de l'application de la règle hyp, puisque pour introduire un « », il faut partir d'une hypothèse. Les petits points doivent être pensés comme indiquant les références. Mais, contrairement à ce qu'il se passait dans l'exemple, les références ne peuvent ici se faire qu'aux règles déjà posées ou à celles que nous poserons explicitement plus loin. Il faut enfin noter que la justification de la règle j ne fait pas mention seulement du point de départ (ligne n) et du point d'arrivée (ligne m), mais à toute la sous-déduction qui va de n à m. D'où la notation : n-m.

Remarque

> On appelle *sous-déduction* d'une déduction, toute suite de propositions accompagnées d'un trait vertical à droite d'un autre.

Exemples

[1] $p \vdash q \supset p$

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & p & \text{hyp (unique élément de la classe d'hyp.)} \\
2 & \quad \underline{q} & \text{hyp (pour introduire un « } \supset \text{ »)} \\
3 & \quad p & \text{1, reit} \\
4 & q \supset p & \text{2-3, } \supset\text{i}
\end{array}$$

Remarque

> Considérons la proposition p de la ligne 3. Nos écritures nous rendent attentifs à ce que p est placée sous deux hypothèses : l'hypothèse p (ligne 1) et l'hypothèse q (ligne 2). En revanche, la même proposition p, atome de la proposition moléculaire $p \supset q$ de la ligne 4, ne dépend plus que de l'hypothèse de la ligne 1. Nous constatons ainsi qu'un des effets de la règle $\supset$ i est de *nous libérer d'une hypothèse.*

On peut alors se demander s'il ne serait pas possible, dans certains cas, de se libérer de toute hypothèse. Voyons, pour cela, l'exemple suivant.

[2] $\vdash p \supset (q \supset p)$

$$\begin{array}{r|l|l}
1 & \quad p & \text{hyp} \\
2 & \qquad \underline{q} & \text{hyp} \\
3 & \qquad p & \text{1, reit} \\
4 & \quad q \supset p & \text{2-3, } \supset\text{i (libération de l'hyp. 2)} \\
5 & p \supset (q \supset p) & \text{1-4, } \supset\text{i (libération de l'hyp. 1)}
\end{array}$$

Remarques

1. Le trait de déduction qui est tout à gauche n'est marqué d'aucune petite barre horizontale. Donc la proposition 5 ne dépend d'aucune hypothèse. Il est vrai que, pour l'établir, nous avons dû recourir à des sous-déductions qui, elles, usaient d'hypothèses. Mais peu importe : la proposition 5 ne dépend directement d'aucune hypothèse, elle est déduite de la classe d'hypothèses vide. Nous écrirons :

   soit $\oslash \vdash p \supset (q \supset p)$ soit plus simplement$\vdash p \supset (q \supset p)$ et nous dirons, de toute proposition déductible de la classe d'hypothèses vide, qu'elle est un *théorème logique*. Sa déduction porte alors le nom de *démonstration*.
2. Le premier trait vertical est indispensable : il indique que l'on effectue une déduction à partir de la classe d'hypothèses vide. On pourrait donc écrire aussi :

1	$\oslash$	hyp (classe vide)
2	p	hyp (pour $\supset$i)
2	q	hyp (pour $\supset$i)
3	p	2, reit
4	$q \supset p$	3-4, $\supset$i
5	$p \supset (q \supset p)$	2-5, $\supset$i
	$\oslash \vdash p \supset (q \supset p)$	

[3] $\vdash p \supset p$

1	p	hyp
2	p	1, rep
3	$p \supset p$	1-2, $\supset$i

[4] $\vdash (p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset m))$

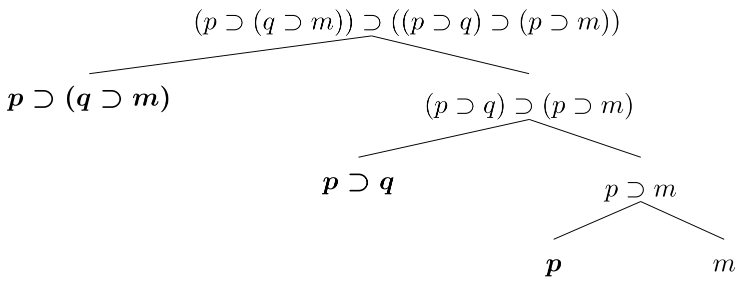
Pour trouver une démonstration de ce théorème, qui est déjà un peu compliqué, il suffit de procéder méthodiquement.

1. Comme tout théorème, il ne dépend d'aucune hypothèse, d'où le fait que le trait vertical numéro 0 n'a aucune barre horizontale.
2. Le théorème est de la forme $P \supset_1 Q$, où P a la valeur $p \supset (q \supset m)$ et il nous faudra introduire ce premier signe $\supset$. Pour cela, la règle $\supset$ i indique qu'il faut poser $p \supset (q \supset m)$ en hypothèse, en l'accompagnant d'un trait vertical (numéro 1).
3. Qa la valeur $(p \supset q) \supset (p \supset m)$, expression qui est encore de la forme $P' \supset_2 Q'$ si on donne à P' la valeur $p \supset q$. Il nous faudra donc introduire ce second signe$\supset$et poser, pour cela, $p \supset q$ en hypothèse, en l'accompagnant d'un trait vertical (numéro 2).
4. 4. Enfin Q' a la valeur p m. Il ne reste plus qu'à nous mettre en situation pour introduire ce troisième signe « ». Pour cela on pose p en hypothèse en l'accompagnant du trait vertical numéro 3.
5. 5. Notre problème est maintenant d'utiliser les règles (et plus spécialement
6. la règle d'élimination) pour obtenir la proposition m (ligne 8). 6. Il suffit maintenant d'appliquer trois fois de suite la règle j pour reconstruire le théorème de proche en proche.

1	$p \supset (q \supset m)$	hyp
2	$p \supset q$	hyp
3	p	hyp
4	$p \supset q$	2, reit
5	q	4, 3, $\supset$e
6	$p \supset (q \supset m)$	1, reit
7	$q \supset m$	6, 3, $\supset$e
8	m	7, 5, $\supset$e
9	$p \supset m$	3-8, $\supset$i
10	$(p \supset q) \supset (p \supset m)$	2-9, $\supset$i
11	$(p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset m))$	1-10, $\supset$i

Remarques

1. II serait aussi possible d'analyser la proposition à démontrer sous forme d'arbre. On obtiendrait :



   La procédure consiste à introduire successivement, sous forme d'hypothèses, toutes les propositions qui sont les plus à gauche (ici en caractères gras), puis à chercher à obtenir (par les règles) les propositions qui ne sont pas en caractères gras.

2. Le lecteur aura intérêt à examiner attentivement cet exemple, qui est paradigmatique.

3. Cet exemple montre déjà que l'usage des parenthèses devient assez vite encombrant. II existe une notation, dite polonaise (elle est due, en effet, à Lukasiewicz) qui dispense de toute parenthèse (voir le Fascicule 3). Quant à nous, nous nous contenterons ici, pour alléger les écritures, de remplacer parfois certaines paires de parenthèses par un simple point.

   Exemple :

   Au lieu de $(p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (p \supset m))$ nous écrirons,
   par exemple : $p \supset (q \supset m) \cdot \supset \cdot (p \supset q) \supset (p \supset m))$

4. On remarquera que, si une proposition contient plusieurs signes $\supset$, l'un d'entre eux est « principal ». Dans le cas où la proposition est un théorème, il est lié au signe $\vdash$.

   Exemple : $\vdash p \supset (q \supset p)$

   C'est le premier signe $\supset$ qui est principal. Le théorème affirme donc un énoncé de la forme

   $$\vdash P \supset Q$$

   où P a la valeur p et Q la valeur $q \supset p$. (Cf. §1.7).

1.4 La proposition conjonctive

Une proposition conjonctive est de la forme : P et Q. Nous écrirons $P \wedge Q$, ce que certains auteurs notent : $P\&Q$, $P.Q$ ou même simplement PQ.

Supposons qu'une telle proposition, par exemple « il fait grand froid et j'ai tué six loups » soit vraie. L'usage habituel de la conjonction « et » est tel que nous entendons que « il fait grand froid » et « j'ai tué six loups » sont également deux propositions vraies. Ceci conduit à poser les deux règles d'élimination suivantes, que nous désignerons par le même sigle : $\wedge$ e.

Règles $\wedge$e

$$\begin{array}{r|l} n & \underline{P \wedge Q} \\ & P \qquad n,\ \wedge\text{e} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{r|l} n & \underline{P \wedge Q} \\ & \text{Q} \qquad n,\ \wedge\text{e} \end{array}$$

Inversement d'ailleurs, dans le cas où l'on sait que les deux propositions P et Q sont vraies séparément, nous sommes disposés à affirmer que la proposition conjonctive $P \wedge Q$ est aussi vraie. D'où la règle $\wedge$ i :

Règle $\wedge$ i

$$\begin{array}{r|ll} n & P & \\ m & Q & \\ & \ldots & \\ & P \wedge Q & n,\ m\ \wedge\text{i} \end{array}$$

Remarque

> Ici encore les petites barres en traitillé indiquent que les propositions qui sont au-dessus sont les prémisses de la règle et que la proposition qui est au-dessous en est la conclusion.

L'emploi de ces règles est extrêmement facile. En voici quelques exemples.

Exemples

[1] $\vdash p \supset (p \wedge p)$

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & \quad \underline{p} & \text{hyp} \\ 2 & \quad p & 1,\ \text{rep} \\ 3 & \quad p \wedge p & 1,\ 2,\ \wedge\text{i} \\ 4 & p \supset (p \wedge p) & 1\text{-}3,\ \supset\text{i} \end{array}$$

[2] $\vdash (p \wedge p) \supset p$

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & \quad \underline{p \wedge p} & \text{hyp} \\ 2 & \quad p & 1,\ \wedge\text{e} \\ 3 & (p \wedge p) \supset p & 1\text{-}2,\ \supset\text{i} \end{array}$$

[3] $\vdash (p \wedge q) \supset (q \wedge p)$

1	$\quad p \wedge q$	hyp
2	$\quad p$	1, $\wedge$e
3	$\quad q$	1, $\wedge$e
4	$\quad q \wedge p$	3, 2, $\wedge$i
5	$(p \wedge q) \supset (q \wedge p)$	1-4, $\supset$i

Remarque : Aucune hypothèse n'a été faite, dans l'énoncé des règles, sur la relation entre n et$m$. Il s'ensuit qu'elles sont applicables aussi bien lorsque $n < m$ que lorsque $m < n$.

[4]$\vdash ((p \wedge q) \wedge m) \supset (p \wedge (q \wedge m))$

1	$\quad (p \wedge q) \wedge m$	hyp
2	$\quad p \wedge q$	1, $\wedge$e
3	$\quad m$	1, $\wedge$e
4	$\quad p$	2, $\wedge$e
5	$\quad q$	2, $\wedge$e
6	$\quad q \wedge m$	5, 3, $\wedge$i
7	$\quad p \wedge (q \wedge m)$	4, 6, $\wedge$i
8	Th.	

Remarque : au lieu de répéter la donnée à la dernière ligne d'une démonstration, nous écrirons souvent « Th. », abréviation pour « le théorème à démontrer ».

[5]$(p \supset q) \wedge (q \supset m) \vdash p \supset m$

1	$(p \supset q) \wedge (q \supset m)$	hyp
2	$\quad$ p	hyp
3	$\quad (p \supset q) \wedge (q \supset m)$	1, reit
4	$\quad p \supset q$	3, $\wedge$e
5	$\quad q \supset m$	3, $\wedge$e
6	$\quad q$	4, 2, $\supset$e
7	$\quad m$	5, 6, $\supset$e
8	$p \supset m$	2, 7, $\supset$i

Comme on le voit sur cet exemple, la procédure heuristique décrite à la fin du paragraphe 1.3, reste applicable ici. Après avoir pris comme hypothèses tous les antécédents possibles, on décompose entièrement les propositions pour « reconstruire » ensuite le tout.

1.5 La proposition biconditionnelle

On rencontre souvent, dans les textes scientifiques, la locution « si et seulement si » que d'aucun abrègent en « ssi ».

Exemple : Un triangle a ses trois côtés égaux si il a ses trois angles égaux.

Un tel énoncé signifie deux choses :

1. Si un triangle a ses trois côtés égaux, il a ses trois angles égaux.
2. Si un triangle a ses trois angles égaux, il a ses trois côtés égaux.

La proposition qui contient « si et seulement si » équivaut donc à deux propositions conditionnelles. Nous la nommerons une proposition *biconditionnelle* et nous poserons la définition (notre première définition) :

$$\text{Df} \equiv : P \equiv Q = \text{ df } (P \supset Q) \wedge (Q \supset P).$$

Remarques

1. Au lieu du foncteur abréviatif $\equiv$, certains auteurs notent $\leftrightarrow$ ou $\Leftrightarrow$.
2. II arrive fréquemment que, au vu du contexte, le langage courant se contente de « si... alors », là où nous disons « ssi ».
   Exemple : Ouvrant son porte-feuille quelqu'un dit : « Si j'ai 10€ sur moi, je vous les prête ». Il va ici de soi que « Si je vous prête 10€, alors je les ai sur moi ».
   Il s'ensuit que chaque fois que l'on cherche à « traduire » un texte dans le formalisme logique, il faut être attentif, non seulement à l'expression adoptée, mais à sa signification. Certains raisonnements peuvent parfaitement être corrects avec $\equiv$et n'être pas valides avec $\supset$.

La règle repdf rend superflue l'introduction de règles spécifiques pour le foncteur $\equiv$.

Exemples

[1] Soit à démontrer le théorème $\vdash p \equiv \cdot p \wedge p$. Cela signifie qu'il faut démontrer $\vdash (p \supset \cdot p \wedge p) \wedge (p \wedge p \cdot \supset p)$:

1	$\quad \mid p$	hyp
2	$\quad \mid p$	1, rep
3	$\quad \mid p \wedge p$	1, 2, $\wedge$i
4	$p \supset \cdot p \wedge p$	1-3, $\supset$i
5	$\quad \mid p \wedge p$	hyp
6	$\quad \mid p$	5, $\wedge$e
7	$p \wedge p \cdot \supset p$	5-6, $\supset$i
8	$(p \supset \cdot p \wedge p) \wedge (p \wedge p \cdot \supset p)$	4, 7, $\wedge$i
9	$p \equiv \cdot p \wedge p$	8, repdf$\equiv$

[2] $\vdash p \equiv p$

1	$\quad \mid p$	hyp
2	$\quad \mid p$	1, rep
3	$p \supset p$	1-2, $\supset$i
4	$p \supset p$	3, rep
5	$(p \supset p) \wedge (p \supset p)$	3, 4, $\wedge$i
9	$p \equiv p$	5, repdf$\equiv$

Pour des références ultérieures, notons encore :

[3] $\vdash p \wedge q \cdot \equiv \cdot q \wedge p$

[4] $\vdash (p \wedge q) \wedge m \cdot \equiv \cdot p \wedge (q \wedge m)$

[5] $\vdash (p \supset q \cdot \wedge \cdot q \supset p) \supset (p \equiv q)$

1.6 Théorèmes, métathéorèmes, règles dérivées

Avant d'aller plus loin, faisons le point de ce qui est déjà acquis. Nous sommes partis de propositions atomiques, en ce sens que, pour l'instant, nous renonçons à les analyser plus avant. Ces propositions sont vraies ou fausses et nous les désignons par des minuscules : p, q, m, etc.

Nous nous sommes aussi donnés des foncteurs propositionnels : $\supset$, $\wedge$ et $\equiv$ qui désignent des opérations. Cela signifie que, placés entre deux propositions (pas nécessairement atomiques d'ailleurs), ils engendrent une nouvelle proposition complexe ou, comme nous l'avons dit aussi, moléculaire.

Exemples. Si nous partons des propositions atomiques$p$ et q, nous pourrons engendrer successivement, par exemple :

(1) $p \wedge q$

(2) $(p \wedge q) \supset p$

(3) $p \supset (p \wedge q)$.

« Se donner » des foncteurs revenait, dans le présent contexte, à poser des règles pour les introduire et pour les éliminer dans le cours d'une déduction. Il se trouve que, en appliquant les règles, il est parfois possible de déduire une proposition à partir d'une ou de plusieurs autres.

Exemple : La proposition q peut se déduire des deux propositions p et $p \supset q$. Nous disons aussi que q peut se déduire de la classe d'hypothèses $\{p, p \supset q\}$ et nous notons : $p, p \supset q \vdash q$.

Les propositions, qui sont déductibles à partir de la classe d'hypothèses vide, forment un ensemble particulier, celui des *théorèmes* du système.

Ainsi la proposition (2) ci-dessus est un théorème et nous écrivons : $\vdash (p \wedge q) \supset p$.

D'autre part, nous avons aussi introduit des majuscules P, Q, M, etc. que nous avons appelées des *variables syntaxiques* ou encore *métavariables*.

Elles prennent des propositions (quelconques) comme valeurs. Comment en faire usage ? Pour voir la chose clairement, prenons un exemple.

Soit la proposition (qui d'ailleurs est un théorème) « $(p \wedge q) \supset p$ ». Rien n'empêche de l'appeler P, donc de donner à la variable P la valeur $(p \wedge q) \supset p$. Mais on peut aussi remarquer que la proposition en question est une conditionnelle. Pour souligner la chose, nous pourrions l'écrire sous la forme $P \supset Q$. Dans ce cas nous attribuons à P la valeur $p \wedge q$ et àQ la valeur p. Nous pourrions aussi songer à souligner le fait que l'antécédent de cette conditionnelle est une conjonction et écrire que la proposition est de la forme $(P \wedge Q) \supset M$. Dans ce cas, P aurait la valeur p, Q la valeur q et M la valeur p. Enfin, nous pourrions vouloir marquer que le proposition p se retrouve deux fois. Cela nous conduirait à écrire : $(P \wedge Q) \supset P$. On constate alors que la proposition $(p \wedge q) \supset p$ et l'expression $(P \wedge Q) \supset P$ ne diffèrent qu'en ce que la première s'écrit avec des minuscules (c'est une proposition du système) et la seconde avec des majuscules. Mais, comme P et Q ne sont pas des propositions, mais des variables, il serait abusif de l'appeler une proposition. Nous dirons qu'il s'agit d'une *forme propositionnelle.*

Faisons un pas de plus. Dans le cas qui nous occupe, $(p \wedge q) \supset p$ est un théorème. Nous dirons alors que la forme propositionnelle, que l'on obtient en remplaçant les minuscules par des majuscules, sous les deux conditions suivantes :

1) à une même minuscule correspond une même majuscule,

2) à deux minuscules différentes correspondent deux majuscules différentes,

est un *métathéorème.*

Il est ainsi clair que, à chacun des théorèmes que nous avons démontré, on peut faire correspondre un métathéorème.

Exemples

Théorèmes	*Métathéorèmes*
$\vdash p \supset p$	(1) $\vdash P \supset P$
$\vdash (p \supset q) \wedge (q \supset m) \cdot \supset (p \supset m)$	(2) $\vdash (P \supset Q) \wedge (Q \supset M) \cdot \supset (P \supset M)$
$\vdash (p \supset q) \wedge (q \supset p) \cdot \supset (p \equiv q)$	(3) $\vdash (P \supset Q) \wedge (Q \supset P) \cdot \supset (P \equiv Q)$
$\vdash p \equiv p$	(4) $\vdash P \equiv P$
$\vdash p \equiv q \cdot \supset \cdot q \equiv p$	(5) $\vdash P \equiv Q \cdot \supset \cdot Q \equiv P$
$\vdash (p \equiv q) \wedge (q \equiv m) \cdot \supset (p \equiv m)$	(6) $\vdash (P \equiv Q) \wedge (Q \equiv M) \cdot \supset (P \equiv M)$
$\vdash p \equiv \cdot p \wedge p$	(7) $\vdash P \equiv \cdot P \wedge P$
$\vdash p \wedge q \cdot \equiv \cdot q \wedge p$	(8) $\vdash P \wedge Q \cdot \equiv \cdot Q \wedge P$
$\vdash (p \wedge q) \wedge m \cdot \equiv \cdot p \wedge (q \wedge m)$	(9) $\vdash (P \wedge Q) \wedge M \cdot \equiv \cdot P \wedge (Q \wedge M)$

Un métathéorème offre l'avantage de « condenser » en lui un nombre indéfini de théorèmes. Il suffit, pour les écrire, de donner à ses variables des valeurs arbitraires en respectant la condition : à une même variable, attribuer la même valeur.

Exemple : le métathéorème $\vdash P \wedge Q \supset P$.

Variables	Valeurs atrtribuées	Théorèmes
P et Q	p et q	$\vdash (p \wedge q) \supset p$
P et Q	q et p	$\vdash (q \wedge p) \supset q$
P et Q	p et p	$\vdash (p \wedge p) \supset p$
P et Q	$(p \wedge q)$ et $(q \supset p)$	$\vdash (p \wedge q) \wedge (q \supset p) \cdot \supset (p \wedge q)$

Passons maintenant aux règles. La première chose à laquelle on peut songer, est de les combiner entre elles pour en obtenir de nouvelles, que nous appellerons des *règles dérivées.* Il est ainsi particulièrement commode de chercher des règles dérivées pour le fondeur $\equiv$.

1	$P \supset Q$	hyp
2	$Q \supset P$	hyp
3	$(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$	1, 2, $\wedge$i
4	$P \equiv Q$	3, repdf$\equiv$

1	$P \equiv Q$	hyp
2	P	hyp
3	$(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$	1, repdf $\equiv$
4	$P \supset Q$	3, $\wedge$e
5	Q	2, 3, $\supset$e

D'où les règles :

Règle $\equiv$ i

n	$P \supset Q$	
m	$Q \supset P$	
	$\dots$	
	$P \equiv Q$	n, m, $\equiv$i

Règle $\equiv$ e

n	$P \equiv Q$	
m	P	
	$\dots$	
	Q	n, m, $\equiv$e

n	$P \equiv Q$	
m	Q	
	$\dots$	
	P	n, m, $\equiv$e

Remarque

La seconde règle d'élimination s'obtient de façon analogue à la première.

Mais on peut faire encore plus. Nos règles ont certaines propriétés que l'on peut étudier, ou mieux, dont on peut étudier les effets. Expliquons-nous sur un exemple.

Supposons qu'on ait pu démontrer deux métathéorèmes, disons $\vdash P^{'}$ et $\vdash P^{'} \supset Q^{'}$. Cela signifie que nos règles nous ont permis de déduire, à partir de la classe d'hypothèses vide deux expressions de la forme $P^{'}$ et $P^{'} \supset Q^{'}$. Dans ces conditions, elles nous permettraient aussi de déduire l'expression $Q^{'}$ de la classe d'hypothèses vide. Pour s'en assurer, il suffit de raisonner de la façon suivante :

1. Puisque $\vdash P^{'}$, c'est qu'on peut trouver une démonstration de $P^{'}$, disons en m étapes,
2. De même, puisque $\vdash P^{'} \supset Q^{'}$, c'est qu'on peut trouver une démonstration de $P^{'} \supset Q^{'}$, disons en n étapes,
3. Mettons ces deux démonstrations bout à bout et poursuivons comme il est indiqué :

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & . & \\
 & . & \\
 & . & \\
\mathrm{m} & P' & \\
\end{array}
\left.\vphantom{\begin{array}{l}.\\.\\.\\P'\end{array}}\right\}\text{Démonstration de } P'
$$

$$
\begin{array}{r|ll}
m+1 & . & \\
 & . & \\
 & . & \\
m+n & P' \supset Q' & \\
 & Q' & m,\ m+n,\ \supset \text{e}
\end{array}
\quad \left.\vphantom{\begin{array}{l}.\\.\\.\\P'\end{array}}\right\}\text{Démonstration de } P' \supset Q'
$$

On a donc bien, sous les deux conditions $\vdash P^{'}$ et$\vdash P^{'} \supset Q^{'}$, que Q' est un métathéorème, donc que$\vdash Q^{'}$.

Cette constatation porte sur une propriété de notre système. On peut l'énoncer en disant :

Si P' est un théorème dans le système et si $P^{'} \supset Q^{'}$, en est aussi un, alors Q' est un théorème dans le système.

Nous appellerons *épithéorèmes* des énoncés de ce genre, qui portent sur la logique que nous construisons. Et nous écrirons :

Épithéorème 1 : $\vdash P^{'}$ et$\vdash P^{'} \supset Q^{'} \Longrightarrow Q'$

Remarque

Le signe $\Longrightarrow$ n'appartient pas au système, pas plus que « et » ou que $\vdash$. Il abrège un discours sur le système et est donc un métasigne.

Exemple d'application

Prenons pour P' l'expression $P \equiv Q$ et pour Q' l'expression $Q \equiv P$. Nous savons que $\vdash P \equiv Q \cdot \supset \cdot Q \equiv P$ (métathéorème (5) de tout à l'heure). Nous pouvons donc dire :

(*) Si $\vdash P \equiv Q$ alors $\vdash Q \equiv P$.

En effet, l'épithéorème 1 suppose deux conditions :

1. $\vdash P^{'}$, donc ici que $P \equiv Q$ soit un métathéorème,
2. $P^{'} \supset Q^{'}$, donc ici que $P \equiv Q \cdot \supset \cdot Q \equiv P$ soit aussi un métathéorème.

Mais cette seconde condition est établie. Il ne reste donc plus que la condition (1). D'où l'énoncé (*) que nous pouvons écrire en abrégé :

$\vdash P \equiv Q \;\; \Longrightarrow \vdash Q \equiv P$

Remarque

> Il est très important de noter que, si les raisonnements qui permettent d'établir et d'utiliser un épithéorème se font « logiquement », il ne saurait être question de les faire dans notre système. Nous sommes obligés de faire appel aux pratiques non formelles de la pensée naturelle.

Donnons encore un second exemple, qui sera utile plus loin.

Épithéorème 2 : $\vdash P', \vdash Q', \vdash (P' \wedge Q') \supset M' \;\; \Longrightarrow \vdash M'$

Le raisonnement est analogue au précédent et nous nous bornons à l'indiquer :

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \left.\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P' \end{array}\right\} & \text{Démonstration de } P' \\
\text{m} & & \\
m+1 & \left.\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P' \supset Q' \end{array}\right\} & \text{Démonstration de } Q' \\
m+n & & \\
m+n+1 & \left.\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P' \wedge Q' \supset M' \end{array}\right\} & \text{Démonstration de } P' \wedge Q' \supset M' \\
m+n+1 & & \\
\text{m+n+k+1} & p' \wedge Q' & m,\ m+n,\ \wedge\ \text{i} \\
\text{m+n+k+2} & M' & m+n+k,\ m+n+k+1,\ \supset\ \text{e}
\end{array}
$$

Exemple d'application

Remplaçons P' par $P \supset Q$, Q' par $Q \supset M$ et M' par $P \supset M$. Nous aurons pour $P' \wedge Q' \supset M'$ l'expression :

$(P \supset Q) \wedge (Q \supset M) \cdot \supset (P \supset M)$

que nous savons être un métathéorème (exemple (2)). Nous pouvons donc conclure de l'épithéorème 2 :

$\vdash P \supset Q$ et $\vdash Q \supset M \implies \vdash P \supset M$.

1.7 La relation d'implication et celle d'équivalence

Partons de la notion de proposition conditionnelle. Une telle proposition peut être vraie ou fausse comme n'importe quelle autre. Ainsi la proposition « Si X est marié, il a une seule femme légitime » est vraie en Europe, fausse dans certaines civilisations. D'autre part, une proposition peut être vraie pour diverses raisons : juridiques, physiques, logiques, etc.

Considérons alors une proposition conditionnelle qui est vraie pour des raisons logiques. Cela signifie qu'elle est un théorème, donc de la forme $\vdash P \supset Q$. Tel est, par exemple, le cas de la proposition « $p \supset (q \supset p)$ », si on pose $P =$df p et $Q =$df $p \supset q$. Il est clair que, dans ces conditions, l'antécédent P et le conséquent Q de la conditionnelle ne sont pas quelconques. En d'autres termes, si la proposition conditionnelle $P \supset Q$ est un théorème logique, c'est qu'il existe une certaine relation entre P et Q. Nous dirons alors (et seulement alors) que P *implique* Q (certains disent : P implique matériellement Q) et nous noterons : $P \to Q$. Ceci conduit à poser :

Df$\to$: $P \to Q$ =df $\vdash P \supset Q$

soit : « P implique Q » veut dire que la proposition conditionnelle « si P alors Q » est un théorème logique.

Remarques

Il est très important de ne pas confondre les signes « $\to$ » et « $\supset$ ». Le premier est un signe de relation (un relateur), le second est un signe d'opération (un opérateur ou, comme nous disons, un foncteur). L'analogie arithmétique suivante permettra de comprendre pourquoi la confusion est malheureusement facile en logique. Le signe « $<$ » est un relateur en arithmétique. On écrit, par exemple : $3 < 10$. A ceci correspond la proposition « 3 est plus petit que 10 ». Par ailleurs, on écrit aussi en arithmétique : $3 + 10$. Le signe « $+$ » est un opérateur et l'expression ne correspond pas à une proposition, mais elle désigne le nombre 13.

En logique toutefois $P \to Q$ se traduit par une proposition : « P implique Q » et $P \supset Q$ se traduit aussi par une proposition : « si P alors Q ». Cela n'empêche pas la distinction conceptuelle, mais elle est évidemment moins claire. On pourrait parler, comme le faisait Georges Boole (18151864), d'une proposition primaire pour $P \supset Q$ et d'une proposition secondaire pour $P \to Q$. La difficulté tient, en partie, à ce que les langues naturelles ne possèdent pas de moyens systématiques propres à assurer la distinction entre ces deux espèces de propositions.

Donnons à P valeur p et à Q la valeur $q \supset p$. On a alors $\vdash P \supset Q$, soit par définition $P \to Q$. Dès lors :

1. $P \supset Q$, soit « si p alors $q \supset p$ » est une proposition qui appartient à notre système.
2. $P \to Q$, soit « p implique $q \supset p$ » est un énoncé qui appartient à la métalangue.

Et l'on voit que nous avons un moyen systématique de distinguer les propositions primaires (du système) des propositions secondaires (qui portent sur le système).

Étudions maintenant quelques unes des propriétés de cette relation d'implication.

1. Elle est *réflexive* : $P \to P$

   En effet, par définition, $P \to P$ signifie $\vdash P \supset P$, ce qui est le métathéorème (1) du §1.6
2. Elle est *transitive* : $P \to Q$ et $Q \to M \implies P \to M$

   Il faut donc montrer que si $\vdash P \supset Q$ et si $\vdash Q \supset M$, alors on a $\vdash P \supset M$. C'est l'exemple d'application que nous avons donné de l'épithéorème 2.

   Puisque (c'est une définition reçue en algèbre) toute relation qui est à la fois réflexive et transitive est une relation de préordre, nous pouvons affirmer que l'implication est une *relation de préordre.*

D'une façon analogue, nous allons partir de la proposition biconditionnelle. Elle est de la forme $P \equiv Q$, soit P ssi Q. Si maintenant les propositions désignées par P et Q sont telles que la proposition désignée par $P \equiv Q$ est un théorème, donc si $\vdash P \equiv Q$, c'est qu'il existe entre elles une certaine relation que nous noterons $\leftrightarrow$.

Df$\leftrightarrow$: $P \leftrightarrow Q =$df $\vdash P \equiv Q$.

Étudions aussi cette relation.

(a) Elle est *réflexive* : $P \leftrightarrow P$ Par le métathéorème (4) du §1.6.

(b) Elle est *symétrique* : $P \leftrightarrow Q \Longrightarrow Q \leftrightarrow P$
Par le métathéorème (5) du §1.6 et l'exemple d'application de l'épithéorème 1.

(c) Elle est *transitive* : $P \leftrightarrow Q$ et $Q \leftrightarrow M \Longrightarrow P \leftrightarrow M$
Par le métathéorème (6) du §1.6 et l'épithéorème 1.

Il s'ensuit que, par définition, la relation est une relation d'équivalence.

Les logiciens ont l'habitude de l'appeler simplement *la relation d'équivalence*. C'est donc un abus de langage, mais il est reçu.

Ceci nous permet de revenir à la relation d'implication. Nous savons déjà qu'il s'agit d'une relation de préordre. Mais elle jouit encore d'une troisième propriété.

3. Elle est *antisymétrique* : $P \rightarrow Q$ et $Q \rightarrow P \Longrightarrow P \leftrightarrow Q$
   Par le métathéorème (3) du §1.6.
   On convient de dire que la relation d'implication, qui est donc réflexive, transitive et antisymétrique est une *relation d'ordre*.
   Notons enfin que les métathéorèmes (7), (8) et (9) du §1.6 peuvent s'écrire :

$P \leftrightarrow P \wedge P$	:	P	est équivalente à	$P \leftrightarrow P$
$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$	:	$P \wedge Q$	est équivalente à	$Q \wedge P$
$(P \wedge Q) \wedge M \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge M)$	:	$(P \wedge Q) \wedge M$	est équivalente à	$P \wedge (Q \wedge M)$

Ces trois équivalences expriment des propriétés importantes du fondeur $\wedge$, à savoir que l'opération de conjonction est *idempotente*, *commutative* et *associative*.

Remarque

Il faut prendre garde de ne pas confondre les termes :

1. Réflexif, symétrique et transitif, qui désignent des propriétés de certaines *relations* et
2. Idempotent, commutatif et associatif, qui désignent des propriétés de certaines *opérations*.

1.8 Proposition disjonctive

Une proposition disjonctive est de la forme P ou Q et nous noterons : $P \vee Q$. Il est d'autant plus remarquable de constater que la quasi-totalité des logiciens est d'accord aujourd'hui pour utiliser le signe $\vee$ que la conjonction (grammaticale) *ou* peut avoir deux sens. Elle peut indiquer la disjonction exclusive ou le disjonction non exclusive.

1. *Disjonction exclusive.* On entend que l'une seulement des propositions est vérifiée.

   Exemple : « Tu mangeras ta soupe ou tu seras privé de dessert. » Le contexte familial et normal laisse entendre que si l'enfant mange sa soupe, il aura du dessert. C'est l'usage qui correspond au latin *aut.*

2. *Disjonction non exclusive.* Ici on admet que les deux propositions peuvent être satisfaites. Ceci correspond au latin *vel* et, en anglais scientifique, on écrit parfois *and/or.*

   Exemple : « Le roi, l'âne ou moi nous mourrons », proposition qui peut se paraphraser :

   « Le roi mourra ou l'âne mourra ou je mourrai », sans qu'il soit exclu que plus d'un malheur se produise.

Pour des raisons purement internes au système que nous élaborons, et sur lesquelles nous reviendrons plus loin (Fascicule 2), nous allons nous donner des règles qui conduisent à l'interprétation non exclusive.

Supposons donc que quelqu'un ait pu établir la proposition P et donc que, en un sens naïf, P soit vraie. Dans ces conditions, $P \vee Q$ sera aussi vraie. En effet deux cas sont possibles :

1. Q est une proposition fausse. Mais le sens de *ou* est précisément d'exprimer qu'il suffit que l'une des deux propositions soit vérifiée.
2. Q est une proposition vraie. Dans ce cas les deux propositions sont vraies, ce qui est admissible dans l'interprétation non exclusive que nous avons choisie.

Nous poserons alors :

Règle $\vee$e

$$\begin{array}{r|ll} n & P & \\ & \dots & \\ & P \vee Q & n, \vee \text{ i} \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} n & Q & \\ & \dots & \\ & P \vee Q & n, \vee \text{ i} \end{array}$$

Comme on le voit, la règle se présente sous deux formes. La première permet d'introduire une proposition à droite de celle donnée à la ligne n, la seconde d'introduire une proposition à gauche de celle donnée à la ligne n. Il ne semble pas plus nécessaire ici que dans le cas de la règle $\wedge$ e d'introduire deux sigles distincts.

Exemples

[1]$\vdash p \supset (p \vee p)$

$$\begin{array}{r|l|l} 1 & \quad \begin{array}{|l} \underline{p} \end{array} & \text{hyp} \\ 2 & \quad \begin{array}{|l} p \vee p \end{array} & 1, \vee\text{i} \\ 3 & p \supset (p \vee p) & 1\text{-}2, \supset\text{i} \end{array}$$

[2]$\vdash p \supset (p \vee q)$

$$\begin{array}{r|lll}
1 & \quad | \ \underline{p} & & \text{hyp} \\
2 & \quad | \ p \vee q & & 1, \vee \text{ i} \\
3 & p \supset (p \vee q) & & \text{1-2}, \supset\text{i}
\end{array}$$

Remarque

> L'exemple [1] permet d'écrire $p \rightarrow p \vee p$, soit de dire que p implique $p \vee p$. Ceci n'a rien de particulièrement choquant. En revanche, l'exemple [2] conduit à affirmer que p implique (logiquement) p ou q, soit p ou n'importe quelle proposition. Et ce fait peut paraître plus gênant. Nous ne saurions recommander à un candidat bachelier de répondre que « toute équation du deuxième degré a deux solutions ou qu'elle en a vingt et une ». Néanmoins, la règle $\vee$i et l'algèbre (une équation du deuxième degré a deux solutions, réelles ou pas) s'accordent pour faire de la proposition disjonctive ci-dessus une proposition vraie. Cet exemple laisse entendre que notre façon de traiter le foncteur « ou » (et d'ailleurs les autres foncteurs logiques) ne tient aucun compte de l'information transmise par les propositions (Voir au Fascicule 2 la notion de tautologie).

Pour éliminer $\vee$, nous poserons en règle une pratique assez fréquente et qu'illustre l'exemple suivant.

Supposons qu'on sache d'un triangle qu'il est isocèle ou équilatéral.

Nous pourrons alors raisonner ainsi :

1ère hypothèse :	1. Le triangle est isocèle.	
	2. Il a deux angles égaux.	1, raison. géom.
2ème hypothèse :	3. Le triangle est équilatéral,	
	4. Il a deux angles égaux.	3, raison. géom.

Donc, puisque nous savons que le triangle en question est « isocèle ou équilatéral » et que chacun des termes de l'alternative conduit à la même conclusion, nous pouvons affirmer que ce triangle a deux angles égaux (au moins).

Nous poserons alors :

Règle $\vee$e

$$\begin{array}{r|lll}
\text{n} & P \vee Q & & \\
 & \dots & & \\
m & & | \ \underline{P} & \text{hyp} \\
 & & | \ . & \\
 & & | \ . & \\
m' & & | \ M & \\
l & & | \ Q & \text{hyp} \\
 & & | \ . & \\
 & & | \ . & \\
l' & & | \ M & \\
 & M & & n, m - -m', l - -l', \vee\text{e}
\end{array}$$

Cette règle exige donc de poser successivement comme hypothèse chacun des termes de la proposition disjonctive $P \vee Q$. Elle conduit donc à faire deux sous-déductions et à tenter de déduire (par les règles du système) une même proposition M. Si on y parvient, la règle $\vee$e autorise à écrire M dans la même déduction que $P \vee Q$. Il faut noter encore que les deux sous-déductions sont indépendantes l'une de l'autre. En particulier, ni la règle rep, ni la règle reit ne permet de répéter une proposition de l'une dans l'autre.

[3] $\vdash p \vee q \cdot \supset \cdot q \vee p$

1	$p \vee q$	hyp (pour introduire $\supset$)
2	p	hyp (pour introduire $\vee$)
3	$p \vee q$	2, $\vee$i (deuxième forme)
4	q	hyp (second terme de l'alternative)
5	$p \vee q$	4, $\vee$i (première forme)
6	$p \vee q$	1, 2-3, 4-5, $\vee$e
	Th.	1-6, $\supset$i

Remarque

Comme on peut démontrer, de façon analogue, la réciproque de ce théorème, on peut conclure que l'opération de disjonction est commutative.

[4] $\vdash p \vee p \cdot \supset p$

$p \vee p$	hyp
P	hyp
P	2, rep
P	hyp
P	4, rep
P	1, 2-3, 4-5, $\vee$e
Th.	1-6, $\supset$i

Remarques

1. Cet exemple, dont la démonstration pourrait en pratique être abrégée puisque les lignes 4 et 5 ne sont que la répétition des lignes 2 et 3, souligne assez bien l'aspect ludique du système.
2. Les exemples (1) et (4) permettent de dire que l'opération y est idempotente.
3. On établira, en exercice, qu'elle est aussi associative. La manipulation de la disjonction étant un peu moins facile que celle des autres opérations, nous allons encore en donner deux exemples.

[5] $\vdash p \vee (q \wedge m) \cdot \supset \cdot (p \vee q) \wedge (p \vee m)$

1	$p \vee (q \wedge m)$	hyp
2	p	hyp (pour éliminer $\vee$ dans 1
3	$p \vee q$	2, $\vee$i
4	$p \vee m$	2, $\vee$i
5	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	3, 4 $\wedge$i
6	$q \wedge m$	hyp (pour éliminer $\vee$ dans 1
7	q	6, $\wedge$e
8	m	6, $\wedge$e
9	$p \vee q$	7, $\vee$i
10	$p \vee m$	8, $\vee$i
11	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	4, $\vee$i (première forme)
12	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	1, 2-5, 6-11, $\vee$e
13	Th.	1-12, $\supset$i

[6] $\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee m) \cdot \supset \cdot p \vee (p \wedge m)$

1	$(p \vee q) \wedge (p \vee m)$	hyp
2	$p \vee q$	1, $\wedge$e
3	$p \vee m$	1, $\wedge$e
4	p	hyp (pour éliminer $\vee$ dans 2)
5	$p \vee (q \wedge m)$	4, $\vee$i
6	q	hyp (pour éliminer $\vee$ dans 2)
7	$p \vee m$	3, reit
8	p	hyp (pour éliminer $\vee$ dans 7)
9	$p \vee (q \wedge m)$	8, $\vee$i
10	m	hyp (pour éliminer $\vee$ dans 7)
11	q	6, reit
12	$q \wedge m$	10, 11, $\wedge$i
13	$p \vee (q \wedge m)$	12, $\vee$i
14	$p \vee (q \wedge m)$	7, 8-9, 10-13, $\vee$e
	$p \vee (q \wedge m)$	2, 4-5, 6-14, $\vee$e
13	Th.	1-125, $\supset$i

Remarque

L'équivalence $p \vee (q \wedge m) \longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee m)$ exprime la distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$. On verra en exercice que la distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$ peut aussi être établie.

1.9 La négation

Jusqu'ici, nous avons admis que, dans les applications, nous traiterions comme atomiques aussi bien les propositions affirmatives que les propositions négatives. Il est toutefois clair que toute proposition négative, disons Q, peut se comprendre comme la négation d'une proposition affirmative : *non–P*.

Exemples

[1] « 6 n'est pas un nombre premier », soit Q peut se comprendre comme : « non : 6 est un nombre premier », soit *non--*P.

[2] « Il n'y a pas de roses sans épines » peut se comprendre comme : « non : il y a des roses sans épines ».

Le mot « non » joue encore le rôle d'un foncteur propositionnel, mais c'est un *foncteur unaire*, en ce sens qu'il s'applique à une seule proposition. Il désigne l'opération qui transforme une proposition Pen sa négation *non–*P. Nous noterons $\sim P$, ce que d'autres écrivent aussi $\neg P$ ou $\bar{P}$ ou $P^{'}$.

Il est facile de voir que la négation joue un rôle privilégié en logique. On peut tout d'abord s'assurer sur soi-même qu'il n'est pas immédiat que la négation de « il est bête et méchant » soit « il n'est pas bête ou il n'est pas méchant ». On peut aussi constater que des logiques, comme la logique intuitionniste ou la logique minimale, diffèrent avant tout de la logique classique par l'usage qu'elles font de la négation. Ceci suffit déjà à expliquer pourquoi nous allons procéder en plusieurs étapes et examiner chaque fois la portée des règles introduites.

Règle ∼i

Commençons par poser que, si une proposition P, prise comme hypothèse, conduit à une contradiction – c'est-à-dire qu'il est possible d'en déduire une proposition Q et la négation de Q – alors c'est $\sim P$ qu'il faut affirmer. Cela nous donne :

Règle ∼i

$$
\begin{array}{r|l|ll}
n & & \underline{P} & \text{hyp} \\
 & & \cdot & \\
 & & \cdot & \\
m & & Q & \\
k & & \sim Q & \\
 & \multicolumn{2}{|l}{\sim P} & n,\, m,\, k,\, \sim\text{i}
\end{array}
$$

Remarques

1. Il s'agit ici d'une règle qui codifie, dans notre système, le raisonnement par l'absurde : toute proposition qui conduit à une contradiction doit être niée.
2. Cette règle est très proche de la règle $\supset$i, en ce sens qu'elle permet de se libérer d'une hypothèse. Toutefois la référence se fait aux seules propositions n, m et k et non à toute la sous-déduction.
3. Cette règle se propose d'introduire un signe « $\sim$ », de même que la règle $\supset$i, par exemple, servait à introduire un signe « $\supset$ ». Il y a cependant ici un élément qui peut paraître paradoxal. Si l'on convient de considérer que toute la sous-déduction n–k constitue la prémisse de la règle, on constate que la prémisse contient nécessairement une mention du signe « $\sim$ » que la règle a pour but d'introduire !

   Il est clair que le « $\sim$ » qui précède la proposition de la ligne k ne saurait, sans cercle vicieux, être introduit par la règle. Il faut donc en conclure qu'il ne peut y figurer que s'il est préalablement contenu dans l'hypothèse P. En conséquence, notre système ne permet de traiter de la négation que dans la mesure où nous prenons nous-mêmes en considération (pour en examiner les conséquences) des propositions elles-mêmes négatives ;. Cette sorte de restriction est liée à l'adage que, en logique, le vrai ne peut conduire au faux.

Exemples

[1] $\vdash (p \supset q) \wedge (p \supset\sim q) \cdot \supset\sim p$

1	$\mid\ \mid (p \supset q) \wedge (p \supset\sim q)$	hyp (pour $\supset$i)
2	$\mid\ \mid\ \mid p$	hyp (pour $\sim$i)
3	$\mid\ \mid\ \mid (p \supset q) \wedge (p \supset\sim q)$	1, reit
4	$\mid\ \mid\ \mid p \supset q$	3, $\wedge$e
5	$\mid\ \mid\ \mid p \supset\sim q$	3, $\wedge$e
6	$\mid\ \mid\ \mid q$	2, 4, $\supset$e
7	$\mid\ \mid\ \mid \sim q$	2, 5, $\supset$e
8	$\mid\ \mid \sim p$	2, 6, 7, $\sim$i
9	$\mid$ Th.	1-8, $\supset$i

[2] $\vdash p \supset\sim\sim p$

1	$\mid\ \mid p$	hyp (pour $\supset$i)
2	$\mid\ \mid\ \mid \sim p$	hyp (pour $\sim$i)
3	$\mid\ \mid\ \mid p$	1, reit
4	$\mid\ \mid\ \mid \sim p$	2, rep
5	$\mid\ \mid \sim\sim p$	2, 3, 4, $\sim$i
6	$\mid$ Théorème	1-5, $\supset$i

Remarques

1. Il faut se garder de conclure que, puisque l'hypothèse $\sim p$ conduit à une contradiction, c'est p qui est la proposition correcte. Nous n'avons, pour le moment, aucune règle qui nous permette d'éliminer une négation.
2. L'exemple [2] permet d'écrire le métathéorème : $\vdash P \supset\sim\sim P$. On aura donc l'implication $P \rightarrow\sim\sim P$ qui est une partie du principe classique de la double négation.
3. Rien n'empêche aussi de s'en tenir (avec P à la place de p) aux cinq première lignes de l'exemple [2] et de conclure à la règle dérivée suivante que nous désignerons par neg $\sim$ i (introduction « négative » de $\sim$) :

Règle neg ∼i

$$\begin{array}{r|ll} n & P & \\ & \ldots & \\ 5 & \sim\sim p & \text{n, neg} \sim\text{i} \end{array}$$

[3] $p, \sim p \vdash\sim q$

$$\begin{array}{r|l|lll} 1 & & p & & \text{hyp (les éléments} \\ 2 & & \sim p & & \text{de la classe d'hypothèses)} \\ 3 & & & \mid q & \text{hyp (pour} \sim\text{i)} \\ 4 & & & \mid p & \text{1, reit} \\ 5 & & & \mid \sim p & \text{2, reit} \\ 6 & & \sim q & & \text{3, 4, 5,}\sim\text{i} \end{array}$$

Remarques

1. Nous pouvons tirer de l'exemple [3] la règle (provisoire) suivante :

   Règle *N*

   $$\begin{array}{r|ll} n & \mathrm{P} & \\ m & \sim P & \\ & \ldots & \\ & \sim Q & n,\ m,\ N \end{array}$$

2. On entend volontiers dire qu'« une contradiction conduit à n'importe quoi ». Ce que nous pouvons toutefois établir pour l'instant, c'est que : $P\wedge \sim P\cdot \rightarrow\sim Q$. En effet, cette implication signifie que $\vdash P\wedge \sim P \supset\sim Q$, métathéorème qui découle immédiatement de la règle N. Nous pouvons donc, quant à nous, dire : « une contradiction conduit à la négation de n'importe quelle proposition ».

Dérivons maintenant directement trois nouvelles règles :

Règle neg ∧i (pour introduire une conjonction précédée d'une négation)

1	$\sim P \vee \sim Q$	hyp (prémisse de la règle)
2	$\mid\ P \wedge Q$	hyp (pour ∼i)
3	$\mid\ P$	2, ∧e
4	$\mid\ Q$	2, ∧e
5	$\mid\ \sim P \vee \sim Q$	1, reit
6	$\mid\ \mid\ \sim P$	hyp (pour ∨e)
7	$\mid\ \mid\ P$	3, reit
8	$\mid\ \mid\ Q$	4, reit
9	$\mid\ \mid\ \sim Q$	6, 7, N
10	$\mid\ \mid\ Q \wedge \sim Q$	8, 9, ∧i
11	$\mid\ \mid\ \sim Q$	hyp (pour ∨e)
12	$\mid\ \mid\ Q$	4, reit
13	$\mid\ \mid\ Q \wedge \sim Q$	11, 12, ∧i
14	$\mid\ Q \wedge \sim Q$	5, 6-10, 11-13, ∨e
15	$\mid\ Q$	14, ∧e
16	$\mid\ \sim Q$	14, ∧e
17	$\mid\ \sim (P \wedge Q)$	2, 15, 16, ∼i

Règle neg ∨i (pour introduire une disjonction précédée d'une négation)

1	$\sim P \wedge \sim Q$	hyp (prémisse de la règle)
2	$\mid\ P \vee Q$	hyp (pour ∼i)
3	$\mid\ \sim P \wedge \sim Q$	1, reit
4	$\mid\ \sim P$	
5	$\mid\ \sim Q$	
6	$\mid\ \mid\ P$	hyp (pour ∨e)
7	$\mid\ \mid\ \sim P$	3, reit
8	$\mid\ \mid\ \sim (P \vee Q)$	4, reit
		6, 7, N
9	$\mid\ \mid\ Q$	hyp (pour ∨e)
10	$\mid\ \mid\ \sim Q$	4, reit
11	$\mid\ \mid\ \sim (P \vee Q)$	11, 12, ∧i
12	$\mid\ \sim (P \vee Q)$	5, 6-10, 11-13, ∨e
13	$\mid\ P \vee Q$	14, ∧e
14	$\sim (P \vee Q)$	14, ∧e

Règle neg ∨e (pour éliminer une disjonction précédée d'une négation)

1	$\sim (P \vee Q)$	hyp (prémisse de la règle)
2	$\mid\ P$	hyp
3	$\mid\ P \vee Q$	2, ∨i
4	$\mid\ \sim (P \vee Q)$	1, reit
5	$\sim P$	2, 3, 4, ∼i
6	$\mid\ Q$	hyp
7	$\mid\ P \vee Q$	6, ∨i
8	$\mid\ \sim (P \vee Q)$	1, reit
9	$\sim Q$	6, 7, 8, ∼i
14	$\sim P \vee \sim Q$	5,9, ∧i

Faisons maintenant le point de la situation. Si nous ajoutons aux règles générales et aux règles pour les fondeurs $\supset$, $\wedge$, et $\vee$, la règle $\sim$i, nous pouvons dériver les règles suivantes :

Règle N

$$\begin{array}{|l} P \\ \sim P \\ \ldots \\ \sim Q \end{array}$$

Règle neg $\sim i$

$$\begin{array}{|l} P \\ \ldots \\ \sim\sim P \end{array}$$

Règle neg $\wedge i$

$$\begin{array}{|l} \sim P \vee \sim Q \\ \ldots \\ \sim (P \wedge Q) \end{array}$$

Règle neg $\wedge i$

$$\begin{array}{|l} \sim P \wedge \sim Q \\ \ldots \\ \sim (P \vee Q) \end{array}$$

Règle neg $\vee e$

$$\begin{array}{|l} \sim (P \vee Q) \\ \ldots \\ \sim P \wedge \sim Q \end{array}$$

Les deux règles neg $\wedge i$ et neg $\vee e$ constituent l'une des lois de Morgan. Il est tentant de se demander si l'on ne pourrait pas encore dériver la règle neg A e (avec neg A j, nous obtiendrions l'autre loi de Morgan) et la règle neg $\sim$e (avec neg $\sim$i nous aurions la loi de double négation). En fait on peut montrer, par des considérations métathéoriques que nous ne rapporterons pas, que la chose n'est pas possible. Cela signifie que nous ne disposons, pour le moment, que d'une forme faible de la négation. On l'appelle parfois la réfutabilité et la logique obtenue équivaut à la logique dite minimale de Johansson (1936). (On trouvera des compléments d'information dans le Fascicule 3).

Comme la limitation fondamentale réside en ce que la règle N ne nous permet que d'arriver à une proposition négative $\sim Q$, nous allons renforcer notre négation en introduisant l'équivalent du principe fameux : *ex falso quodlibet sequitur*. Nous poserons donc la nouvelle règle suivante :

Règle $\sim$e

$$\begin{array}{l|ll} \text{n} & P & \\ \text{m} & \sim P & \\ & \ldots & \\ & Q & \qquad n,\ m,\ \sim\text{e} \end{array}$$

Remarques

1. Il est évidemment un peu abusif de considérer cette règle comme une règle d'élimination. La proposition Q de la conclusion peut fort bien désigner une proposition qui commence par une négation. Il est cependant commode d'adopter cette terminologie pour des raisons de symétrie.
2. Cette règle dispense de la règle$N$, en ce sens que toute déduction qui faisait usage de la règle N peut être refaite en utilisant la règle $\sim$e.
3. Cette nouvelle règle est cependant plus forte que la règle N, ce qui signifie qu'elle permet de démontrer de nouveaux théorèmes.

Exemple $\vdash\sim p \vee q \cdot \supset \cdot p \supset q$

1	$\sim p \vee q$	hyp
2	$\quad p$	hyp
3	$\quad \sim p \vee q$	1, reit
4	$\quad\quad \sim p$	hyp
5	$\quad\quad p$	2, reit
6	$\quad\quad q$	4, 5, $\sim$e (La règle N permettrait seulement d'écrire $\sim q$)
7	$\quad\quad q$	hyp
8	$\quad\quad q$	7, rep
9	$\quad q$	3, 4-6, 7-8, $\vee$e
10	$p \supset q$	2-9, $\supset$i
	Théorème	1-10, $\supset$i

4. Il est toutefois remarquable que nous ne puissions encore ni déduire les règles neg $\sim$e, neg $\wedge$e, ni la réciproque du théorème ci-dessus. Examinons, par exemple, ce que donnerait une tentative de démontrer :
$p \supset q \cdot \supset \cdot \sim p \vee q$

1	$p \supset q$	hyp
2	$\quad \sim (\sim p \vee q)$	hyp (pour $\sim$i)
3	$\quad \sim\sim p \wedge \sim q$	2, neg $\vee$e
4	$\quad \sim\sim p$	3, $\wedge$e
5	$\quad \sim q$	3, $\wedge$e
6	$\quad p \supset q$	1, reit

On voit que, si l'on pouvait passer de $\sim\sim p$ à p, il serait possible d'éliminer $\supset$ grâce à la ligne 6. Cela conduirait à q et, en présence de $\sim q$ (ligne 5), nous aurions la contradiction souhaitée. En fait nous pourrions écrire alors $\sim\sim (\sim p \vee q)$ et il faudrait, une nouvelle fois, éliminer une double négation.

Il s'ensuit que nous disposons maintenant d'un nouveau type de négation, plus fort que la réfutabilité mais pas encore « complet » au sens classique. Cette négation se nomme volontiers l'*absurdité* et le système obtenu en ajoutant aux règles de la logique minimale la règle $\sim$e équivaut à la *logique intuitionniste* de Heyting (1930).

Pour terminer, donnons-nous la règle neg $\sim$e :

Règle neg $\sim$e

n	$\sim\sim P$	
	$\ldots$	
	P	n, neg $\sim$e

Nous venons d'esquisser la preuve qu'il est maintenant possible de démontrer $\vdash p \supset q \cdot \supset \cdot \sim p \vee q$ ce qui permet d'affirmer que $\sim p \vee q$ est équivalent à $p \supset q$. Il est aussi facile de déduire la règle neg $\wedge$e qui manquait :

Règle neg $\wedge$e

n	$\sim\sim P$	
	$\ldots$	
	P	n, neg $\sim$e

En effet :

1	$\sim (P \wedge Q)$	hyp
2	$\sim (\sim P \vee Q)$	hyp
3	$\sim\sim P \wedge \sim\sim Q$	2, neg $\wedge$**e**
4	$\sim\sim P$	3, $\wedge$**e**
5	P	4, neg $\sim$e
6	$\sim\sim Q$	3, $\wedge$**e**
7	Q	6, neg $\sim$e
8	$P \wedge Q$	5, 7, $\wedge$**i**
9	$\sim (P \wedge Q)$	1, reit
10	$\sim\sim (\sim P \vee \sim Q)$	2, 8, 9, $\sim$i
11	$\sim P \vee \sim Q$	10, neg $\sim$e

Le système engendré par les règles suivantes : règles générales, règles pour $\supset$, $\vee$, $\wedge$, règles $\sim$i, $\sim$e et neg $\sim$e conduit à la l*ogique classique des propositions.* Le métathéorème suivant, dit *principe du tiers exclu*, en est caractéristique :

$\vdash P \vee \sim P$

Preuve

1	$\sim (P \wedge \sim P)$	hyp (pour $\sim$i)
2	$\sim P \wedge \sim\sim P$	1, neg $\wedge$**e**
3	$\sim P$	2, $\wedge$**e**
4	$\sim\sim P$	2, $\wedge$**e**
5	$\sim\sim (\sim P \vee \sim Q)$	1, 3, 4, $\sim$i
6	$P \vee \sim P$	5, neg $\sim$e

Remarques

1. Ainsi qu'on peut le constater, la ligne 5 s'obtient à l'aide de règles qui sont déjà disponibles en logique minimale. C'est donc bien l'élimination de la double négation qui est caractéristique de la logique classique.
2. Glivenko (1929), comparant la logique intuitionniste I et la logique classique C, a pu établir l'épithéorème suivant :

   Si $\vdash_c P$ alors $\vdash_i \sim\sim P$ et réciproquement.
3. En résumé, nous avons la suite de systèmes logiques suivante, suite dans laquelle tout théorème d'un système à gauche d'une flèche est aussi théorème des systèmes à droite, sans que la réciproque soit vraie :

   Règles générales + Règle $\sim$i + Règle $\sim$e + Règle neg $\sim$e Règles $\supset$i, $\supset$e, $\wedge$i, $\wedge$e, $\vee$i, $\vee$e

L. positive$\rightarrow$	L. minimale$\rightarrow$	L. intuitionniste$\rightarrow$	L. classique
Pas de nég.	Réfutabilité	Absurdité	Négation
4. Le lecteur vérifiera qu'en logique classique il est possible de dériver les deux règles suivantes, qui sont très commodes à l'usage :

   Règle neg $\supset i$

n	$P \wedge \sim Q$	
	...	
	$\sim (P \supset Q)$	n, neg $\supset i$

   Règle neg $\supset e$

n	$\sim (P \supset Q)$	
	...	
	$P \wedge \sim Q$	n, neg $\supset e$