ANALYSE BINAIRE

PAR

R. L. VALLÉE

TOME I

théorie et applications aux circuits combinatoires

MASSON & CIE

Dhenin
le 16/1/73

ANALYSE BINAIRE

TOME I

THÉORIE ET APPLICATIONS AUX CIRCUITS COMBINATOIRES

A LA MÊME LIBRAIRIE

ANALYSE BINAIRE, par R.L. VALLÉE.
Tome II. - *Clef des automates numériques* (*sous presse*).

*
**

LES FONCTIONS GÉNÉRALISÉES OU DISTRIBUTIONS, par M. BOUIX. 1964. 224 pages, 28 figures (*Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens*).

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DES CIRCUITS DE L'ÉLECTRONIQUE, par J. ORTUSI (*Monographies d'électronique*)

Tome I. - *Analyse des circuits*. 1966. 412 pages, 365 figures, tableaux.

Tome II. - *Synthèse des circuits*. 1967. 544 pages, 403 figures.

MACHINES DE TRAITEMENT DE L'INFORMATION. *Circuits et programmes*, par P. DEBRAINE (*Monographies d'électronique*).

Tome I. - *Etude logique et construction des circuits*. 1967. 454 pages, 376 figures.

Tome II. - *Programmation : principes et langages d'assemblage*. 1969. 420 pages, 86 figures.

Tome III. - *Programmation : langages algorithmiques et systèmes de programmation* (*en préparation*).

CIRCUITS LOGIQUES INTÉGRÉS, par R. LYON-CAEN. 1968. 202 pages, 132 figures (*Monographies d'électronique*).

Collection « Les techniques de base de l'informatique »

ÉLECTRONIQUE DES IMPULSIONS, par G. METZGER et J.P. VABRE.

Tome I. - *Circuits à constantes localisées*. 1966. 264 pages, 306 figures.

Tome II. - *Circuits à constantes réparties*. 1966. 204 pages, 207 figures.

Tome III. - *Les générateurs d'impulsions* (*sous presse*).

PRINCIPES DE PROGRAMMATION DES ORDINATEURS, par A. LAURET. 2[e] édition 1969. 168 pages, 73 figures.

CONCEPTION DE LA PROGRAMMATION DES ORDINATEURS, par J. DU ROSCOAT. 1967, 372 pages, 145 figures.

FIABILITÉ DES SYSTÈMES, par P. CHAPOUILLE et R. DE PAZZIS. 1968. 286 pages, 102 figures.

A Monsieur Marcel Demin
avec les compliments
et toute la sympathie
de l'auteur.
[illegible]

R. L. VALLÉE

ANALYSE BINAIRE

TOME I

THÉORIE ET APPLICATIONS AUX CIRCUITS COMBINATOIRES

MASSON ET Cie, ÉDITEURS
120, boulevard Saint-Germain, Paris 6e
1970

Imprimé en Belgique

p. 78.

ERRATA

Page 9, ligne 22 : *remplacer* le chiffre *par* le nombre.

Page 64, § *3.75*, ligne 3 : *remplacer a, b, c, d par d, c, b, a.*

Page 83, ligne 18 : *remplacer* (fluorure d'ammonium) *par* (acide fluorhydrique).

Page 89, ligne 1 : *remplacer* transistor *par* transistors.

Page 98, § *4.7* : *remplacer*

$$y = \left|\begin{array}{l} x_1 \cdot \bar{x}_2 \\ x_2 \cdot \bar{x}_3 \\ x_3 \cdot \bar{x}_4 \\ \\ \cdots \\ \\ \cdots \\ \\ x_{n-2} \cdot \bar{x}_{n-1} \\ x_{n-1} \cdot \bar{x}_n \\ x_n \cdot \bar{x}_1 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{l|l} x_1 & \bar{x}_2 \\ x_2 & \bar{x}_3 \\ x_3 & \bar{x}_4 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_{n-2} & \bar{x}_{n-1} \\ x_{n-1} & \bar{x}_n \\ x_n & \bar{x}_1 \end{array}\right| \quad \textit{par } y = \left|\begin{array}{l} x_1 \cdot \bar{x}_2 \\ x_2 \cdot \bar{x}_3 \\ x_3 \cdot \bar{x}_4 \\ \\ \cdots \\ \\ \cdots \\ \\ x_{n-2} \cdot \bar{x}_{n-1} \\ x_{n-1} \cdot \bar{x}_n \\ x_n \cdot \bar{x}_1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{l|l} x_1 & \bar{x}_2 \\ x_2 & \bar{x}_3 \\ x_3 & \bar{x}_4 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ x_{n-2} & \bar{x}_{n-1} \\ x_{n-1} & \bar{x}_n \\ x_n & \bar{x}_1 \end{array}\right|$$

Page 145, 2[e] colonne, ligne 11 : *remplacer* concensus *par* consensus.

VALLÉE. — *Analyse binaire*. Tome I.

INTRODUCTION

C'est dans le but de répondre aux exigences actuelles du développement des automatismes numériques, que cet ouvrage a été conçu. L'analyse d'un échec, celui de l'algèbre de Boole auprès des ingénieurs et des techniciens, a montré que des règles intuitives élevées au rang d'axiomes mathématiques mais ignorant souvent les impératifs et les besoins de la pratique, étaient incapables de donner à une théorie, toute la valeur utilitaire exigée par l'avènement des techniques modernes.

Il ne faut pas oublier que George Boole, dans son ouvrage publié en 1854 et intitulé *An investigation of the laws of thought*, avait surtout recherché une méthode mathématique susceptible de codifier la logique formelle. Malgré certains points communs aux déroulements des processus de la logique et des systèmes automatiques, il n'existe pas de raison particulière pour que la méthode préconisée par Boole, soit vraiment en harmonie avec celle qu'il est nécessaire de mettre en œuvre dans l'étude des circuits de commutation et des automatismes numériques.

S'étant inspiré de l'algèbre classique, Boole s'était aperçu très tôt qu'elle n'était pas, dans sa structure, convenablement adaptée au but qu'il s'était fixé. Il y avait, dès lors, un choix subtil à faire entre deux possibilités apparemment équivalentes :

— Modifier l'axiomatique tout en conservant le symbolisme, c'est-à-dire l'écriture en ligne de l'algèbre classique, voie choisie par Boole et tous ceux qui, comme A. N. Whitehead et B. Russel ont, après lui, développé l'algèbre de la logique ou l'algèbre des propositions.

— Ou bien, conserver l'axiomatique de base en modifiant le symbolisme et en faisant apparaître des entités fonctionnelles aux propriétés rigoureusement définies, choix qui procède en réalité de l'analyse et ne se limite pas à l'algèbre.

Par les possibilités d'adaptation de l'analyse, cette seconde voie se révèle, en pratique, plus simple et plus féconde que la première. Il est surprenant de constater qu'elle n'ait pas été suivie par ceux qui s'intéressaient aux circuits de commutation et que Shannon, lui-même, ait choisi une axiomatique différente plutôt que de modifier le symbolisme, alors que l'étude des chaînes de contacts utilisant des relais, conduisait tout naturellement à cette seconde solution.

Il n'existe, semble-t-il, qu'un seul auteur en France, André Blanchard, Professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, qui ait songé à utiliser un symbolisme vraiment adapté à la résolution des problèmes pratiques posés par les automatismes numériques. Ce symbolisme est développé dans un cours (*) intéressant qui concerne les « éléments de commutation générale et leurs applications aux systèmes de téléphonie automatique ». Dans ce cas cependant; et l'auteur l'écrit en introduction, il s'agit encore d'un symbolisme fortement assujetti à l'algèbre de Boole et aux idées déjà développées par Shannon. Ce symbolisme a pourtant influencé profondément l'analyse binaire et lui a donné sa forme décisive.

Il est important de noter à ce sujet combien les mathématiques modernes, par l'intérêt même que suscite la logique de leur construction, présentent un danger qui résulte d'une tendance algébriste beaucoup trop marquée. L'algèbre, que Newton a définie comme « une arithmétique universelle » combinant l'emploi de nombres et de lettres qui les symbolisent, n'est qu'une forme élémentaire des mathématiques, lesquelles sont appelées à de plus grandes destinées. — Que pourrions-nous aujourd'hui si nous ne possédions que l'algèbre ? ignorant la trigonométrie, les fonctions hyperboliques, le calcul opérationnel...

Ainsi l'analyse binaire est née parce qu'elle était nécessaire à la résolution de problèmes pratiques correspondant à des objectifs précis que l'algèbre ne peut résoudre. Ce n'est, théoriquement, qu'une forme particulière et nouvelle d'une analyse mathématique qui transcende l'algèbre. Elle permet d'étudier et de concevoir des systèmes complexes qui semblaient inaccessibles à notre logique. L'analyse binaire est une théorie homogène qui conserve cependant une très grande souplesse. Elle peut, selon les exigences de la technologie, aboutir à la création de fonctions nouvelles lorsque sont définies, avec précision, les propriétés qui les caractérisent. Déjà ont été définies des classes importantes de fonctions : les fonctions de transcodage, les fonctions réflexes, les fonctions génératrices et, sur un plan élémentaire, « le produel » et les « fonctions carrées ».

Tous les circuits actuellement mis en œuvre dans les automatismes numériques en général, et les ordinateurs en particulier, sont susceptibles d'être mis en équations et d'être étudiés par les méthodes de l'analyse binaire. L'étude de la topologie peut même être envisagée et rien n'interdit de penser que la voie nouvelle qui vient de s'ouvrir permette un jour, par l'élargissement du domaine offert à une pensée plus libre, de concevoir la structure et les bases de l'organisation même de notre propre intelligence.

(*) *Cours de l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications*, 1962, Eyrolles Editeur.

NOTIONS DE MATHÉMATIQUES MODERNES

Il est incontestable que les mathématiques ont une base expérimentale, et malgré l'abstraction que leur confère la pensée, leur valeur ne peut être complète que lorsqu'elles reviennent aux sources et aboutissent à des applications pratiques.

Des considérations générales montrent que la pensée logique se caractérise, fondamentalement, par la possibilité élémentaire d'identification qui gouverne le jugement et détermine les actions à entreprendre en fonction de connaissances acquises. L'identification peut revêtir deux aspects différents suivant les conditions qui la déterminent.

— C'est d'une part la synthèse, qui n'est en somme que l'identification globale d'un tout particulier.
— Et d'autre part, l'analyse, qui consiste en une identification par décomposition d'un tout en ses éléments constitutifs déjà identifiés eux-mêmes.

L'analyse et la synthèse expriment, en fait, un même cheminement parcouru dans deux sens différents.

La pensée peut ainsi évoluer, s'élever, se perfectionner, puisqu'il lui est possible, à tout instant, de modifier sa progression et de revenir sur ses pas lorsque la voie empruntée s'avère sans issue. Analyse et synthèse donnent à la pensée une liberté essentielle qui l'autorise à une remise en cause permanente de l'acquis en fonction des éléments nouveaux retenus au cours de son évolution.

Exprimés sous forme mathématique, nous retrouvons, à la base de la théorie des ensembles, ces procédés élémentaires d'analyse et de synthèse qui traduisent les deux courants inverses et complémentaires suivant lesquels s'élabore le processus d'identification dans la pensée logique.

L'identification d'un ensemble ou d'une collection quelconque d'objets n'est rendue possible que par la définition qui en est donnée. Cette définition est en général une synthèse opérée à partir d'éléments supposés insécables et parfaitement identifiés.

Comment peut-on définir un ensemble ?

— Il est possible d'établir une liste nominative de tous les objets ou éléments identifiés qui le constituent. Dans ce cas, l'ensemble est défini en *extension.*

— Il est possible, également, de préciser une ou plusieurs propriétés nécessaires et suffisantes auxquelles satisfont tous les éléments de l'ensemble. Les éléments sont alors identifiés par leurs propriétés, et dans ce deuxième cas, nous disons que l'ensemble est défini en *compréhension.*

L'ensemble « E_c » des chiffres 1, 3, 5, 7, 9 par exemple, est défini en extension, alors que l'ensemble « E_i » des nombres impairs, se trouve par contre défini en compréhension, puisque tout élément qui appartient à « E_i » possède nécessairement la propriété d'être un nombre ayant la qualité d'être impair. Si « n_i » est un nombre impair, nous disons que « n_i » appartient à l'ensemble « E_i » et nous écrivons :

$$\boxed{n_i \in E_i}$$

Si « n_p » est un nombre pair, nous disons que « n_p » n'appartient pas à « E_i » et nous écrivons :

$$\boxed{n_p \notin E_i}$$

L'ensemble « E_c » est constitué des chiffres impairs 1, 3, 5, 7, 9, chacun de ces éléments appartient également à « E_i » sans constituer la totalité des éléments de ce dernier. Nous disons alors que l'ensemble « E_c » est inclus dans l'ensemble « E_i » et nous écrivons :

$$\boxed{E_c \subseteq E_i}$$

L'inclusion de « E_c » dans « E_i » implique que tout élément « x » appartenant à « E_c » appartient également à « E_i ». L'implication s'écrit à l'aide d'un signe égal complété par une flèche ($\Rightarrow$) dirigée dans le sens de l'implication. Dans le cas considéré nous écrivons :

$$\boxed{\text{si } E_c \subseteq E_i,\ (x \in E_c) \Rightarrow (x \in E_i)}$$

et nous lisons : si « E_c » est inclus dans « E_i », « x » appartenant à « E_c » implique que « x » appartient à « E_i ».

Si deux ensembles sont égaux ($E_i = E_j$), l'implication est valable dans les deux sens. Tout élément de « E_i » appartient à « E_j » et réciproquement. Nous écrivons alors,

$$\boxed{\text{si } (E_i = E_j),\ (x \in E_i) \Leftrightarrow (x \in E_j)}$$

Définissons l'ensemble « E_9 » des neuf premiers chiffres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Cet ensemble contient les éléments 2, 4, 6, 8, qui n'appartiennent pas à « E_i ». « E_9 » n'est donc pas inclus dans « E_i » et nous écrivons :

$$\boxed{E_9 \nsubseteq E_i}$$

D'une façon générale; si tout élément d'un ensemble « A » est élément d'un ensemble « B », nous disons que l'ensemble « A » est inclus dans « B » ou que « B » contient « A », $A \subseteq B$.

Il est toujours possible, d'autre part, d'écrire dans tous les cas :

$$A \subseteq A, \; B \subseteq B.$$

Deux ensembles sont égaux s'ils contiennent exactement les mêmes éléments. Pour vérifier que deux ensembles sont égaux il faut donc s'assurer que tout élément du premier appartient au second et que tout élément du second appartient au premier.

Il y a lieu de noter également l'utilisation courante de signes équivalents à des phrases telles que : « quel que soit... » ($\forall$) ou « il existe... » ($\exists$).

$\forall a$, *signifie : quel que soit « a ».*

$\exists x$, *signifie : il existe « x ».*

En utilisant tous les éléments communs à deux ensembles « A » et « B » il est possible de constituer un ensemble « I ». Nous disons que « I » représente alors *l'intersection* des ensembles « A » et « B » et nous écrivons,

$$\boxed{I = A \cap B}$$

$$\boxed{(x \in A \text{ et } x \in B) \Leftrightarrow (x \in I)}$$

Nous pouvons également rassembler ou réunir la totalité des éléments appartenant aux ensembles « A » et « B ». Nous définissons alors un nouvel ensemble « R » qui est la *réunion des ensembles* « A » et « B » et nous écrivons :

$$\boxed{R = A \cup B}$$

Nous en déduisons les implications :

$$(x \in \mathrm{A}) \Rightarrow (x \in \mathrm{R})$$

$$(x \in \mathrm{B}) \Rightarrow (x \in \mathrm{R}).$$

Si à l'élément générique « *a* » d'un ensemble « A » nous faisons correspondre un élément « *b* », et un seul, de l'ensemble « B », « *b* » est appelé image de « *a* ». Si tout élément de « B » est image d'un ou de plusieurs éléments de « A », nous disons que la correspondance est une *application de l'ensemble « A » sur l'ensemble « B »*. Si, seuls certains éléments de « B » sont les images des éléments de « A », la correspondance est une *application de « A » dans « B »*. Si l'application est réciproque et biunivoque, elle prend le nom de *bijection.*

Nous pouvons établir, entre les éléments d'un ensemble, des relations de composition interne dont nous allons définir les propriétés élémentaires parmi lesquelles : *la réflexivité, la symétrie et la transitivité.*

Soit « $\mathscr{R}$ » une relation de composition interne :

— « $\mathscr{R}$ » est une relation réflexive si nous pouvons écrire A $\mathscr{R}$ A.
— « $\mathscr{R}$ » possède la propriété de symétrie si (A $\mathscr{R}$ B) $\Leftrightarrow$ (B $\mathscr{R}$ A).
— « $\mathscr{R}$ » est une relation transitive si (A $\mathscr{R}$ C et C $\mathscr{R}$ B) $\Rightarrow$ (A $\mathscr{R}$ B).

La relation d'inégalité, par exemple, n'est que transitive, elle n'est ni symétrique ni réflexive.

Lorsqu'une relation « $\mathscr{R}$ » possède simultanément les trois propriétés, nous disons que c'est une relation *d'équivalence*. L'égalité, en particulier, est une relation d'équivalence puisque nous pouvons écrire :

$$\mathrm{A} = \mathrm{A} \qquad \text{— réflexivité}$$

$$(\mathrm{A} = \mathrm{B}) \Leftrightarrow (\mathrm{B} = \mathrm{A}) \qquad \text{— symétrie}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{C} \text{ et } \mathrm{C} = \mathrm{B}) \Rightarrow (\mathrm{A} = \mathrm{B}) \qquad \text{— transitivité}$$

Nous pouvons aussi définir dans l'ensemble « E » des *lois de composition internes* si à tout couple d'éléments $(a, b) \in \mathrm{E}$ nous faisons correspondre un élément $d \in \mathrm{E}$ tel que $d = a * b$.

— La loi est commutative si $a * b = b * a$.
— Elle est associative si $a * b * c = (a * b) * c = a * (b * c)$.

L'élément « $e \in \mathrm{E}$ » est appelé *élément neutre* de la loi interne « $*$ » de « E » si $\forall x \in \mathrm{E}$, nous pouvons écrire, $e * x = x * e = x$.

L'élément « $a \in \mathrm{E}$ » est appelé *élément absorbant* de la loi interne « $*$ » de « E », si $\forall x \in \mathrm{E}$, nous pouvons écrire les égalités :

$$a * x = x * a = a.$$

L'addition, par exemple, admet « 0 » comme élément neutre. Le chiffre « 1 » est l'élément neutre du produit. « 0 » en est l'élément absorbant.

L'existence d'un certain nombre de lois dont les propriétés sont posées comme axiomes, définit dans un ensemble, une structure algébrique. Ce type de structure a été étudié de façon très approfondie en distinguant les structures de groupe, d'anneau et de corps, donnant aux mathématiques modernes cette tendance algébriste que laissaient entrevoir les bases logiques utilisées.

La théorie des ensembles est, cependant, une théorie très intéressante parce qu'elle ouvre l'accès de l'analyse avec la précision et toute la rigueur exigées d'une théorie mathématique.

CHAPITRE PREMIER

SYSTÈMES DE NUMÉRATION

1.1. — Généralités.

Qu'est-ce que la numération décimale ?

Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?...

Le problème de la représentation des nombres, à l'aide de symboles simples et facilement utilisables, s'est posé dès les premiers âges. Il semble que l'habitude de compter sur ses doigts ait conduit l'homme au système décimal.

Les documents les plus anciens relatifs à un système sexagésimal créé par les Chaldéens, remontent à environ 3.000 ans avant J.-C.... La représentation décimale, probablement trouvée par les Indiens et transmise par les Arabes, comprend dix symboles dont le zéro. Ils s'écrivent actuellement (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9). On attribue à chaque chiffre ou symbole d'un nombre décimal, un poids qui est une puissance de dix. fonction de la position du chiffre comptée à partir de la droite.

Par exemple : le nombre « 6384 » représente la somme :

$$6 \times (10)^3 + 3 \times (10)^2 + 8 \times (10) + 4$$

Il est aisé, connaissant la base du système de numération utilisé, d'exprimer un nombre dans un autre système. Il suffit pour cela d'exprimer les chiffres et les poids dans le système de numération choisi.

Donnons-nous, dans le système à base « six » (0, 1, 2, 3, 4, 5) le nombre « 324 » et cherchons son expression dans le système décimal :

$$3 \times (6)^2 + 2 \times (6) + 4 = 124$$

nombre

reprenons le ~~chiffre~~ « 6384_{10} » dans le système décimal et exprimons-le dans le système à base « six ».

Nous aurons alors, en tenant compte du fait que le nombre « 6 » est représenté par « 10 », que « 8 » est représenté par « 12 » et « 10 » par « 14 » :

$$10 \times (14)^3 + 3 \times (14)^2 + 12 \times (14) + 4$$

Mais il faut, dans ce cas, se référer aux tables d'addition et de multiplication relatives au système à base « six ».

Soit pour la table d'addition :

$2 + 1 = 3$	$3 + 1 = 4$	$4 + 1 = 5$	$5 + 1 = 10$
$2 + 2 = 4$	$3 + 2 = 5$	$4 + 2 = 10$	$5 + 2 = 11$
$2 + 3 = 5$	$3 + 3 = 10$	$4 + 3 = 11$	$5 + 3 = 12$
$2 + 4 = 10$	$3 + 4 = 11$	$4 + 4 = 12$	$5 + 4 = 13$
$2 + 5 = 11$	$3 + 5 = 12$	$4 + 5 = 13$	$5 + 5 = 14$

et pour la table de multiplication :

$2 \times 2 = 4$	$3 \times 2 = 10$	$4 \times 2 = 12$	$5 \times 2 = 14$
$2 \times 3 = 10$	$3 \times 3 = 13$	$4 \times 3 = 20$	$5 \times 3 = 23$
$2 \times 4 = 12$	$3 \times 4 = 20$	$4 \times 4 = 24$	$5 \times 4 = 32$
$2 \times 5 = 14$	$3 \times 5 = 23$	$4 \times 5 = 32$	$5 \times 5 = 41$

d'où les multiplications :

$$
\begin{array}{r}
14 \\
\times\ 12 \\
\hline
32 \\
14 \\
\hline
212
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
14 \\
\times\ 14 \\
\hline
104 \\
14 \\
\hline
244 \\
\times\ \ \ 3 \\
\hline
1220
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
244 \\
\times\ 14 \\
\hline
1504 \\
244 \\
\hline
4344 \\
-\ \ 10 \\
\hline
43440
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
43440 \\
+\ \ 1220 \\
+\ \ \ \ 212 \\
+\ \ \ \ \ \ 4 \\
\hline
45320
\end{array}
$$

Le nombre correspondant à 6.384_{10} décimal, s'écrit dans le système à base « six ».

$$\boxed{45.320_6}$$

Pour revenir au système décimal nous pouvons calculer la somme :

$$4 \times (6)^4 + 5 \times (6)^3 + 3 \times (6)^2 + 2 \times (6) + 0 = 6.384_{10}$$

en utilisant dans ce cas les tables d'addition et de multiplication du système décimal.

Il est conseillé, cependant, pour éviter l'établissement des tables d'addition ou de multiplication d'un système particulier de numération, d'opérer toujours dans le système décimal en prenant ce système comme intermédiaire pour passer de l'expression d'un nombre dans un système de base « *a* » à l'expression du même nombre dans un système de base « *b* ».

Il suffit alors de connaître la correspondance des symboles utilisés pour les mêmes chiffres dans les trois systèmes. Ces symboles sont généralement identiques pour les chiffres de « 0 » à « 9 », et au delà, on utilise des lettres dans l'ordre alphabétique en partant de « A ». Dans le système héxadécimal, par exemple, les seize chiffres sont successivement :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Pour pouvoir transposer un nombre entier, $N_a = \alpha_n \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_1 \alpha_2 \alpha_0$, du système de numération à base « a » dans le système à base « c » en passant par le système décimal, il suffit de tenir compte successivement des relations suivantes :

$$N_{10} = \alpha_n (a)^n + \alpha_{n-1} (a)^{n-1} + \dots + \alpha_2 (a)^2 + \alpha_1 (a) + \alpha_o$$
$$N_{10} = \gamma_q (c)^q + \gamma_{q-1} (c)^{q-1} + \dots + \gamma_2 (c)^2 + \gamma_1 (c) + \gamma_o$$

Les chiffres $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_o$ ainsi que la base « a » sont exprimés dans le système décimal.

Pour calculer les chiffres $\gamma_q, \gamma_{q-1}, \dots, \gamma_1, \gamma_o$ dans le système à base « c », on effectue dans le système décimal la division entière de « N_{10} » par « c »; le quotient obtenu est égal à :

$$\gamma_q (c)^{q-1} + \gamma_{q-1} (c)^{q-2} + \dots + \gamma_2 (c) + \gamma_1$$

et le reste est égal à « γ_o ».

En divisant à nouveau le quotient par « c », on obtient comme reste « γ_1 » et ainsi de suite jusqu'à « γ_q ». Il suffit ensuite d'écrire les chiffres γ_o, $\gamma_1, \dots, \gamma_{q-1}, \gamma_q$ dans le système à base « c » pour exprimer le nombre donné dans ce système.

$$N_c = \gamma_q \gamma_{q-1} \gamma_{q-2} \dots \gamma_2 \gamma_1 \gamma_o$$

Exemple. — En passant par le système décimal, transposer le nombre $\boxed{3243312_5}$ du système à base « 5 » dans le système héxadécimal (base 16).

$$N_{10} = 3 \cdot (5)^6 + 2 \cdot (5)^5 + 4 \cdot (5)^4 + 3 \cdot (5)^3 + 3 \cdot (5)^2 + 1 \cdot (5) + 2$$

$$\boxed{N_{10} = 56.082_{10}}$$

Pour calculer N_{16}, on effectue les divisions successives par « 16 » du nombre décimal obtenu.

```
56082 |_16
080    3505  |_16
 0082  030    219   |_16
   0(2) 145   059    (13)
         0(1) (11)   (D)
              (B)
```

d'où

$$\boxed{N_{16} = \text{DB12}}$$

Dans le cas où le nombre transposé n'est pas entier, on peut toujours traiter la partie entière par la méthode précédente. La partie fractionnaire $o, \alpha_{-1}\ \alpha_{-2}\ \ldots\ \alpha_{-n}$ peut s'écrire dans le système décimal :

$$m_{10} = \alpha_{-1}\,(a)^{-1} + \alpha_{-2}\,(a)^{-2} + \ldots + \alpha_{-(n-1)}\,(a)^{-(n-1)} + \alpha_{-n}\,(a)^{-n}$$

ou en partant de la base « c » :

$$m_{10} = \gamma_{-1}\,(c)^{-1} + \gamma_{-2}\,(c)^{-2} + \ldots + \gamma_{-(q-1)}\,(c)^{-(q-1)} + \gamma_{-q}\,(c)^{-q}$$

Pour exprimer « m_{10} » à partir de la base « a », il suffit de calculer, dans le système décimal, la somme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{-i}\,(a)^{-i}$.

Pour calculer les chiffres $\gamma_{-1}\ \gamma_{-2}\ \ldots\ \gamma_{-q}$ du système à base « c » on peut, en constatant que chaque chiffre « γ_{-i} » est inférieur à « c », opérer de la façon suivante :

On multiplie « m_{10} » par « c »

$$c \times m_{10} = \gamma_{-1} + \frac{\gamma_{-2}}{c} + \frac{\gamma_{-3}}{(c)^2} + \ldots + \frac{\gamma_{-(q-1)}}{(c)^{q-2}} + \frac{\gamma_{-q}}{(c)^{q-1}}$$

On constate alors que la partie entière de « $c \times m_{10}$ » est égale à « γ_{-1} ». Il suffit de retrancher ce chiffre et de multiplier à nouveau par « c » le nombre fractionnaire obtenu afin de déterminer « γ_{-2} » partie entière du produit, et ainsi de suite jusqu'à « γ_{-q} ».

Exemple. — En passant par le système décimal, transposer le nombre fractionnaire à base « 5 », $\boxed{0{,}1223033_5}$ dans le système octal (base 8). On se limitera aux décimales significatives.

$$m_{10} = 1\cdot(5)^{-1} + 2\cdot(5)^{-2} + 2\cdot(5)^{-3} + 3\cdot(5)^{-4} + 0 + 3\cdot(5)^{-6} + 3\cdot(5)^{-7}$$

$(5)^{-1} = 0{,}2$
$(5)^{-2} = 0{,}04$
$(5)^{-3} = 0{,}008$
$(5)^{-4} = 0{,}0016$
$(5)^{-5} = 0{,}00032$
$(5)^{-6} = 0{,}000064$
$(5)^{-7} = 0{,}0000128$

le nombre m_{10} est donc égal à $m_{10} = 0{,}3010304$ et dans ce nombre on peut se limiter aux cinq premières décimales :

$$\boxed{m_{10} = 0{,}30103_{10}}$$

Pour trouver l'expression de ce nombre dans le système octal on effectue les multiplications suivantes :

$$
\begin{array}{l}
0,\ 30103 \times 8 = (2),\ 40824 \\
0,\ 40824 \times 8 = (3),\ 26592 \\
0,\ 26592 \times 8 = (2),\ 12736 \\
0,\ 12736 \times 8 = (1),\ 01888 \\
0,\ 01888 \times 8 = (0),\ 15104 \\
0,\ 15104 \times 8 = (1),\ 20832
\end{array}
$$

Ce qui donne dans le système à base « huit » :

$$\boxed{0{,}232101_8}$$

1.2. — Numération binaire.

Si nous considérons des éléments pouvant présenter deux états d'équilibre, tels que « relais » ou « circuits électroniques » saturés, la numération binaire, qui ne comprend que deux chiffres (0 ou 1), se révèle du plus grand intérêt.

Dans le système de numération binaire, qui a été conçu au 17e siècle par Leibnitz, les tables d'addition et de multiplication se réduisent aux expressions particulièrement simples suivantes :

$$1 + 1 = 10 \quad \text{et} \quad 1 \times 1 = 1$$

La correspondance entre nombres binaires et décimaux s'établit aisément selon les tableaux suivants :

décimal	*binaire*
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000

décimal	*binaire*
2	10
$2^2 = 4$	100
$2^3 = 8$	1000
$2^4 = 16$	10000
$2^5 = 32$	100000
$2^6 = 64$	1000000
$2^7 = 128$	10000000
$2^8 = 256$	100000000
$2^9 = 512$	1000000000
$2^{10} = 1024$	10000000000
$2^{11} = 2048$	100000000000
$2^{12} = 4096$	1000000000000

nombres fractionnaires

décimal	*binaire*
$2^{-1} = 0{,}5$	0,1
$2^{-2} = 0{,}25$	0,01
$2^{-3} = 0{,}125$	0,001
$2^{-4} = 0{,}0625$	0,0001
$2^{-5} = 0{,}03125$	0,00001
$2^{-6} = 0{,}015625$	0,000001
$2^{-7} = 0{,}0078125$	0,0000001
$2^{-8} = 0{,}00390625$	0,00000001

Il est aisé de passer du système de numération binaire à tout système ayant pour base une puissance entière de « 2 ». $(2)^n$ est en effet représenté dans le système binaire, par le chiffre « 1 » suivi de « n » zéros. $(2_{10})^n$ correspond à $(10_2)^n$.

Pour passer d'un nombre binaire, au même nombre exprimé dans le système à base $b = (2)^n$, on groupe les chiffres binaires n par n en partant de la virgule, on complète éventuellement par des zéros, puis on remplace chacun des groupes obtenus à la place qu'il occupe, par le chiffre du système à base $(2)^n$ qui lui correspond.

Exemple. — Exprimer le nombre binaire 1101011,11111 dans le système octal, base $8 = (2)^3$, puis héxadécimal base $16 = (2)^4$.

Pour le système octal, on groupe les chiffres binaires trois par trois à partir de la virgule :

001 101 011 , 111 110

001 correspond à 1_8
011 » » 3_8
101 » » 5_8
110 » » 6_8
111 » » 7_8

d'où le nombre octal correspondant $\boxed{153{,}76_8}$

Dans le système héxadécimal, on opère de la même manière mais en groupant les chiffres binaires quatre par quatre puisque $16 = (2)^4$.

0110 1011 , 1111 1000

0110 correspond à 6_{16}
1011 » » B_{16}
1000 » » 8_{16}
1111 » » F_{16}

Le nombre héxadécimal correspondant s'écrit donc :

$$\boxed{6B,\ F8_{16}}$$

Pour passer d'un système à base $(2)^n$, n entier, au système binaire, il suffit de remplacer chaque chiffre, à la place qu'il occupe, par les n chiffres binaires qui le représentent en complétant éventuellement les chiffres de plus haut poids par des zéros.

Exemple. — Exprimer le nombre $2123,12_4$ dans le système binaire,

2_4 correspond à 10_2
1_4 » » 01_2
3_4 » » 11_2

d'où le nombre binaire :

2	1	2	3		1	2
10	01	10	11	,	01	10

soit $\boxed{10011011,\ 011}$

1.3. — Exercices d'application relatifs au chapitre premier

1° Exprimer dans le système binaire, octal, puis héxadécimal les nombres : $\pi = 3{,}1416$ et $e = 2{,}7183$ en conservant la précision relative donnée.

Réponses :

$$\begin{aligned}
\pi_2 &= 11{,}001001000011111_2 \\
\pi_8 &= 3,\ 11037_8 \\
\pi_{16} &= 3,\ 243E_{16} \\
e_2 &= 10,\ 101101111110001_2 \\
e_8 &= 2,\ 55761_8 \\
e_{16} &= 2,\ B7E2_{16}
\end{aligned}$$

2° Exprimer le nombre $12221,\ 3201_4$ dans les systèmes, binaire, octal, héxadécimal et décimal en conservant la précision relative.

Réponses :

$$\begin{gathered}
110101001,\ 11100001_2 \\
651,\ 702_8 \\
1A9,\ E1_{16} \\
425,\ 88_{10}
\end{gathered}$$

3° On donne dans le système à base « 5 » le nombre $4334, \quad 123_5$. Exprimer ce nombre dans le système décimal, puis dans le système à base « 9 ».

Réponses :

$$594, \quad 304_{10}$$
$$730, \quad 2655_9$$

4° Etablir les tables de multiplication et d'addition dans le système octal, puis effectuer, dans ce système, les opérations suivantes :

$a) \begin{array}{r} 1634507, \ 323 \\ +\ 4372513, \ 714 \\ \hline \end{array}$ $\qquad b) \begin{array}{r} 3571 \\ \times\ 427 \\ \hline \end{array}$ $\qquad c)\ 16043 \mid \underline{25}$

Réponses :

a) $6227223, \ 237_8$
b) 2022337_8
c) 527_8

5° Exprimer successivement, dans le système décimal, les trois nombres suivants :

$$10111101, \ 101_2, \qquad 573, \ 2_8, \qquad 2F6, \ 8_{16}$$

Réponses :

$$189, \ 625_{10}, \qquad 379, \ 25_{10}, \qquad 758, \ 5_{10}$$

6° Effectuer, dans le système binaire, la multiplication suivante

$$\left\{ \begin{array}{r} 10110110, \ 11 \\ \times \quad 1101, \ 1 \end{array} \right\}$$

et vérifier le résultat obtenu en opérant dans le système décimal.

Réponses :

$$100110100011, \ 001 \quad \text{soit} \quad 2467, \ 125$$

7° Calculer Log (2) dans le système binaire, en utilisant 10 chiffres après la virgule, et en additionnant les termes de la série

$$\text{Log}\left(\frac{1}{1-x}\right) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \text{ avec } x = \frac{1}{2}$$

Exprimer le nombre obtenu dans le système décimal en l'arrondissant à deux chiffres après la virgule.

Réponse :

$$0, \ 1011000001 \qquad \text{soit} \qquad 0{,}69$$

8° Exprimer le nombre $43222,14_5$ dans le système décimal.

Réponse :

$$2937,36_{10}$$

9° Exprimer le nombre 553124_6 dans le système décimal.

Réponse :

$$46060_{10}$$

10° Exprimer le nombre décimal 19.877_{10} dans le système de numération à base « 7 ».

Réponse :

$$111644_7$$

11° Exprimer le nombre décimal 77.819_{10} dans le système à base « 3 », puis dans le système à base « 9 ».

Réponses :

$$10221202012_3 \quad \text{et} \quad 127665_9$$

CHAPITRE II

DÉFINITIONS

*2.1. — **Ensembles binaires algébriques.***

On appelle variable ou fonction binaire, toute variable ou toute fonction ne pouvant prendre que l'une des deux *valeurs algébriques distinctes* $a \neq b$, à l'exclusion de toute autre.

L'ensemble « E_{ab} » des variables et des fonctions ainsi définies est appelé *ensemble binaire algébrique.* Si l'élément « φ_{ab} » est égal à « a » lorsqu'il est différent de « b » et s'il est égal à « b » lorsqu'il est différent de « a », alors φ_{ab} appartient à l'ensemble « E_{ab} ».

$$\varphi_{ab} \in E_{ab}, \text{ si } (\varphi_{ab} \neq a) \Rightarrow (\varphi_{ab} = b), \text{ et si } (\varphi_{ab} \neq b) \Rightarrow (\varphi_{ab} = a)$$

*2.2. — **Dualité des ensembles binaires algébriques.***

Il est possible de trouver différentes relations d'application d'un ensemble binaire E_{ab} vers un ensemble binaire $E_{\alpha\beta}$.

Les applications les plus simples consistent à faire correspondre les valeurs « a » et « b » de l'ensemble E_{ab} aux valeurs « α » et « β » de l'ensemble $E_{\alpha\beta}$. Cette correspondance peut s'établir selon deux implications qui sont des bijections et peuvent se traduire par deux relations algébriques élémentaires simples.

*2.21. — **Première relation** :*

$$(\varphi_{ab} = a) \Leftrightarrow (\varphi_{\alpha\beta} = \alpha), \ (\varphi_{ab} = b) \Leftrightarrow (\varphi_{\alpha\beta} = \beta)$$

$$\boxed{(\beta - \alpha)\ (\varphi_{ab} - a) = (b - a)\ (\varphi_{\alpha\beta} - \alpha)}$$

*2.22. — **Deuxième relation** :*

$$(\bar{\varphi}_{ab} = a) \Leftrightarrow (\varphi_{\alpha\beta} = \beta), \ (\bar{\varphi}_{ab} = b) \Leftrightarrow (\varphi_{\alpha\beta} = \alpha)$$

$$\boxed{(\beta - \alpha)\,(\bar{\varphi}_{ab} - b) = (a - b)\,(\varphi_{\alpha\beta} - \alpha)}$$

$$\varphi_{\alpha\beta} \in E_{\alpha\beta} \Rightarrow (\varphi_{ab} \in E_{ab} \text{ et } \overline{\varphi_{ab}} \in E_{ab}) \ (*)$$

L'addition membre à membre des relations algébriques 2,21 et 2,22 fournit une *relation algébrique linéaire entre les éléments de l'ensemble* «E_{ab}».

$$\boxed{(\varphi_{ab} + \bar{\varphi}_{ab}) - (a + b) = 0}$$

Il existe donc dans tout ensemble binaire, une relation algébrique linéaire et biunivoque qui fait correspondre deux à deux tous les éléments de l'ensemble.

Cette propriété fondamentale d'automorphisme des ensembles binaires qui résulte du rôle symétrique que jouent les valeurs algébriques « a » et « b » choisies pour leur définition en compréhension, est appelé « dualité ».

On peut, en particulier, choisir pour « a » et « b » les valeurs algébriques « 0 » et « 1 ». Il est en effet intéressant, afin d'utiliser le produit algébrique, de choisir pour « a » l'élément absorbant « 0 » et pour « b » l'élément neutre « 1 », de cette opération.

L'une des deux relations

$$\begin{cases} (b - a)\cdot\varphi_{o1} = (\varphi_{ab} - a) \\ (b - a)\cdot(1 - \bar{\varphi}_{o1}) = (\varphi_{ab} - a) \end{cases}$$

définit une application de l'ensemble E_{o1} vers tout ensemble binaire E_{ab} (**).

Pour l'ensemble E_{o1}, la relation de dualité s'écrit :

$$\boxed{\varphi_{o1} + \bar{\varphi}_{o1} - 1 = 0}$$

$\bar{\varphi}_{o1} = 1 - \varphi_{o1}$, est appelé *complément* de φ_{o1} et s'énonce « φ_{o1} barre ».

Réciproquement $\bar{\varphi}_{o1} = 1 - \varphi_{o1}$, est le complément de $\bar{\varphi}_{o1}$. La double complémentation conduit à la relation *d'involution :*

$$\overline{\overline{\varphi_{o1}}} = 1 - (1 - \varphi_{o1}) = \varphi_{o1}$$

(*) Chaque bijection ne fait pas correspondre au même élément $\varphi_{\alpha\beta}$ un même élément de l'ensemble « E_{ab} ». C'est pourquoi deux symboles différents φ_{ab} et $\bar{\varphi}_{ab}$ ont été utilisés.

(**) Ainsi se trouve établie d'une façon simple, la réciproque du théorème d'isomorphisme de Stone qui révèle que toute algèbre de Boole n'est autre qu'une application de l'ensemble binaire algébrique E_{o1} dont la définition repose sur l'axiomatique de l'algèbre classique.

2.3. — Produits binaires

Le choix de l'ensemble binaire particulier E_{o1}, se justifie par l'adoption d'une valeur d'absorption « 0 » et d'une valeur neutre « 1 » qui font du *produit algébrique* une fonction binaire appartenant au même ensemble.

La dissymétrie introduite fournit deux possibilités de représentation qui se correspondent par dualité en permutant les valeurs « 0 » et « 1 ».

2.31. — ***Produit.*** — Soient n fonctions binaires $f_1, f_2, \ldots f_n$ telles que $f_i \in E_{o1}, \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Le produit algébrique de ces n fonctions appartient à l'ensemble E_{o1}.

$$(P = f_1 \cdot f_2 \ldots f_n) \in E_{o1}$$

Le produit P *est en effet égal à l'unité lorsque toutes les fonctions en facteur sont simultanément égales à l'unité.* $(f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 1) \Leftrightarrow (P = 1)$.

Il est nul dans tous les autres cas, puisque chaque fonction en facteur ne peut prendre que la valeur « 0 » lorsqu'elle n'est pas égale à « 1 » et, que le produit est nul si un facteur au moins est nul.

Nous appellerons également le produit « P » *fonction* « ET » quand il fera l'objet d'applications technologiques.

2.32. — ***Produel.*** — Les définitions algébriques qui précèdent sont suffisantes en principe pour permettre le calcul et l'établissement de toutes les fonctions binaires appartenant à l'ensemble E_{o1}. Mais l'important n'est pas uniquement le choix de l'ensemble E_{o1} avec ses propriétés élémentaires simplificatrices. *Il faut également choisir un symbolisme simple qui puisse traduire dans l'expression écrite, la dualité qui caractérise les ensembles binaires et qui permette, en utilisant si possible les deux dimensions du plan, l'établissement de relations duales élémentaires.*

Nous savons qu'un produit s'exprime algébriquement en disposant horizontalement les facteurs.

$$f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \ldots f_n = P$$

Nous savons aussi, par dualité, qu'il est possible de lui faire correspondre la *fonction algébrique binaire*

$$\pi = 1 - (1 - f_1) \cdot (1 - f_2) \ldots (1 - f_n) = \overline{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 \ldots \bar{f}_n}$$

$$(f_i \in E_{o1}, \forall\ i = 1, 2, \ldots n) \Rightarrow (\pi \in E_{o1}).$$

Nous constatons que la fonction π *est égale à zéro lorsque toutes les fonctions* f_i *sont simultanément nulles,*

$$(f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0) \Leftrightarrow (\pi = 0)$$

et qu'elle est égale à l'unité dans tous les autres cas puisqu'il suffit qu'une fonc- f_i au moins soit égale à l'unité pour que le produit algébrique $(1 - f_1) \cdot (1 - f_2) \ldots (1 - f_n)$ soit nul; ce qui entraîne $\pi = 1$. Nous retrouvons alors dans l'expression de la fonction π, toutes les propriétés d'un produit algébrique (commutativité, associativité). La seule différence, qui résulte de la dualité, réside dans le fait que la valeur d'absorption se trouve être l'unité « 1 » et la valeur neutre « 0 ».

Nous conviendrons alors de représenter la fonction « π », que nous appellerons « *produel* » (*) en groupant les termes qui la composent suivant une colonne verticale par analogie avec l'écriture horizontale du produit, pour traduire dans le symbolisme, la propriété de dualité.

$$\pi = \left| \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{array} \right| = 1 - (1 - f_1)\cdot(1 - f_2) \ \ldots\ (1 - f_n) = \overline{\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 \ \ldots\ \bar{f}_n}$$

nous appellerons également « π », *fonction* « OU » dans le cas des applications technologiques.

Les termes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ seront, par analogie, appelés « *facteurs duals* ».

2.33. — ***Théorème de De Morgan.*** — Ce théorème est contenu implicitement dans les définitions précédentes.

$$1 - \left| \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{array} \right| = \overline{\left| \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{array} \right|} = \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 \ldots \bar{f}_n = (1 - f_1)\cdot(1 - f_2) \ldots (1 - f_n)$$

Le complément d'un produel est égal au produit des compléments des facteurs duals qui le composent.

$$\overline{f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n} = \left| \begin{array}{c} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{f}_n \end{array} \right| = 1 - (f_1 \cdot f_2 \ \ldots\ f_n)$$

Le complément d'un produit est égal au produel des compléments des facteurs qui le composent.

(*) Les racines latines « pro » et « dualis » ont été choisies dans la constitution du néologisme « produel » pour marquer d'une part la nécessité de conserver la dualité dans les expressions binaires et aussi par analogie avec le mot « produit ».

2.34. — **Correspondances duales des propriétés élémentaires.** — Le symbolisme proposé repose sur des bases algébriques simples et rigoureuses. La correspondance duale biunivoque introduite par la définition du *produel* à partir du produit, adapte parfaitement *ce symbolisme* à la représentation simple de toutes les fonctions binaires.

Toute opération, tout théorème de l'analyse binaire, qui possède nécessairement le caractère de dualité, va donc se traduire dans l'écriture par deux applications possibles, absolument analogues; l'une suivant la direction horizontale, l'autre suivant la direction verticale.

A l'exception du théorème de De Morgan, les propriétés duales élémentaires comparées des produits et des produels sont résumées dans le tableau des pages 24 et 25.

2.4. — Fonctions canoniques et tables de vérité

Nous allons démontrer à partir des définitions précédentes que *toute fonction binaire peut s'exprimer; soit par un produit de produels, soit par un produel de produits* faisant intervenir toutes les variables directes ou complémentées (*). Les expressions obtenues sont appelées « *formes canoniques* ».

Considérons en effet une fonction binaire qui dépend de « n » variables distinctes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$. Nous ne pouvons envisager au total que « 2^n » combinaisons de valeurs distinctes (0 ou 1) de ces « n » variables. Si la fonction binaire cherchée est égale à l'unité pour « p » combinaisons particulières des valeurs de ces « n » variables, elle est nécessairement égale à zéro pour les « $2^n - p$ » combinaisons complémentaires et nous avons dans tous les cas $p < 2^n$. Nous pouvons donc écrire la fonction sous la forme d'un *produel de produits* que nous appellerons, par définition « *première forme canonique* ».

$$F_1 = \left| \begin{array}{c} f_1\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \\ f_2\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \\ ----------- \\ ----------- \\ f_p\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \end{array} \right|$$

(*) Nous rappelons, pour mémoire, les expressions équivalentes des produits et des produels dans l'algèbre de Boole.

produit : $a \cdot b \cdot c = a \wedge b \wedge c = a \cap b \cap c$

produel : $\left| \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right| = (a + b + c) = (a \cup b \cup c) = (a \vee b \vee c)$

malgré l'équivalence d'expression, le produel se distingue de la « somme logique » dans sa définition et son symbolisme.

TABLEAU DES PROPRIÉTÉS COMPARÉES DU PRODUIT ET DU PRODUEL

Produit	*Produel*
$\mathrm{P} = a \cdot b \cdot c \cdot d$	$\pi = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{vmatrix} = 1 - (1 - a) \cdot (1 - b) \cdot (1 - c) \cdot (1 - d)$
— élément neutre « 1 » — élément absorbant « 0 » — le produit est commutatif et associatif.	— élément neutre « 0 » — élément absorbant « 1 » — le produel est commutatif et associatif.
Le produit par « 0 » de toute fonction f est nul. $0 \cdot f = 0$	Le produel par « 1 » de toute fonction f est égal à l'unité $\begin{vmatrix} 1 \\ f \end{vmatrix} = 1$
Toute fonction multipliée par 1 reste égale à elle-même $(1 \cdot f) = f$	Toute fonction multipliée dualement par 0 reste égale à elle-même $\begin{vmatrix} 0 \\ f \end{vmatrix} = f$
Théorème d'idempotence	
Si tous les facteurs d'un produit sont égaux à un même terme, le produit est égal à ce terme.	Si tous les facteurs duals d'un produel sont égaux à un même terme, le produel est égal à ce terme.

$$P = \overbrace{a \cdot a \dots a}^{n} = a^n$$

pour $a = 0$ $\quad (0)^n = 0$

pour $a = 1$ $\quad (1)^n = 1$

$$\boxed{P = a^n = a}$$

$$\pi = \left|\begin{array}{c} a \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a \end{array}\right| \Big\} \, n = 1 - (1 - a)^n$$

pour $a = 0$ $\quad \pi = 1 - (1)^n = 0$

pour $a = 1$ $\quad \pi = 1 - (0)^n = 1$

$$\boxed{\pi = a}$$

Si dans un produit, deux facteurs sont complémentaires, le produit est nul.

$$P = f \cdot \bar{f} \cdot P_1$$

$$P = f \cdot (1 - f)\, P_1 = (f - f^2)\, P_1$$

$$P = (0 \cdot P_1) = 0$$

Si dans un produel, deux facteurs duals sont complémentaires, le produel est égal à l'unité.

$$\pi = \left|\begin{array}{c} f \\ \bar{f} \\ \pi_1 \end{array}\right| = 1 - (1 - f) \cdot f \cdot (1 - \pi_1)$$

$$= 1 - (f - f^2) \cdot (1 - \pi_1) - 1 - 0 \cdot (1 - \pi_1)$$

$$\pi = \left|\begin{array}{c} 1 \\ \pi_1 \end{array}\right| = 1$$

Corollaires

Le produit de deux fonctions complémentaires est nul.

$$(f \cdot \bar{f}) = 0$$

Le produel de deux fonctions complémentaires est égal à l'unité.

$$\left|\begin{array}{c} f \\ \bar{f} \end{array}\right| = 1$$

Chaque fonction f_k $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de « F_1 » est un produit faisant intervenir chacune des variables ou son complément. « f_k » est égale à l'unité pour une seule combinaison de valeurs des variables.

Nous en déduisons que « F_1 », produel des « p » produits « f_k » est égal à l'unité pour chacune des « p » combinaisons de valeurs des variables qui correspondent successivement à la valeur unité de chacun des « p » produits. Ceci résulte des définitions précédentes.

Il est également possible d'exprimer la même fonction « F_1 » par un *produit de produels* appelé, par définition, « *deuxième forme canonique* » :

$$F_1 = | f_1' (x_1, x_2, ..., x_n) || f_2' (x_1, x_2, ..., x_n) || ... || f_q' (x_1, x_2, ..., x_n) |$$

Dans cette expression le nombre « q » de produels est tel que $p + q = 2^n$. Chaque fonction « f_k' » représente un produel faisant intervenir chaque variable ou son complément. Le produel « f_k' » est nul pour une seule combinaison de valeurs des variables qui interviennent dans la fonction F_1 et par suite cette fonction « F_1 » qui est le produit des produels « f_k' » sera nulle pour chacune des « q » combinaisons de valeurs des variables qui annulent successivement chacune de ces fonctions « f_k' ».

Nous appellerons « *transposition* », *le passage, pour une même fonction, de la première à la deuxième forme canonique et réciproquement.* Si l'on veut établir le produit égal à l'unité pour une combinaison donnée des valeurs de « n » variables, il suffit de faire le produit des variables directes qui sont égales à « 1 » d'une part et le produit des compléments des variables égales à « 0 » d'autre part, dans la combinaison choisie.

Prenons par exemple quatre variables x_1, x_2, x_3, x_4 et cherchons le produit égal à l'unité pour la combinaison

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1.$$

Ce produit s'établit immédiatement :

$$f = x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$$

Pour la combinaison choisie, nous avons en effet :

$$x_1 = 1, \bar{x}_2 = 1, \bar{x}_3 = 1, x_4 = 1 \text{ d'où } f = 1.$$

Pour établir le produel correspondant à une combinaison de valeurs de « n » variables, il suffit de mettre en facteur dual les variables directes qui correspondent à « 0 » d'une part et les compléments des variables égales à « 1 » d'autre part, dans la combinaison choisie.

Dans le cas, par exemple, de la combinaison de quatre variables $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ on aura :

$$f' = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right|$$

Nous obtiendrons bien, dans le cas considéré :

$$\bar{x}_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \text{ et par suite } f' = 0.$$

Il est donc intéressant, pour établir rapidement une fonction canonique, de connaître le tableau des combinaisons de valeurs des variables qui rendent la fonction égale à zéro ou égale à l'unité. Ce tableau est appelé, par définition « *table de vérité* ».

2.41. — ***Etablissement de la première forme canonique.*** — Pour établir la première forme canonique (produel de produits), on peut opérer de la façon suivante :

On inscrit horizontalement les variables dans un ordre quelconque, puis on porte successivement sous ces variables dans le sens horizontal, les combinaisons de valeurs pour lesquelles la fonction est égale à l'unité. Il suffit alors, d'après ce qui vient d'être dit, de remplacer respectivement dans le tableau obtenu, chaque valeur « 1 » par la variable « x_k » de la même colonne et chaque valeur « 0 » par le complément $\bar{x}_k$ de la variable de la même colonne.

Exemple :

Etablir la première forme canonique d'une fonction de trois variables x_1, x_2, x_3, égale à l'unité lorsque l'une des variables est égale à l'unité, les deux autres étant nulles.

La table de vérité s'écrit :

x_1	x_2	x_3	f
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1

La première forme canonique s'établit immédiatement à partir de la table de vérité comme nous l'avons indiqué précédemment, et nous écrivons :

$$f = \left| \begin{array}{c} x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \end{array} \right|$$

2.42. — ***Etablissement de la deuxième forme canonique.*** — Pour établir la deuxième forme canonique relative aux combinaisons de valeurs de « n » variables pour lesquelles cette fonction est nulle, on inscrit verticalement les variables x_1, x_2, ..., x_n dans un ordre quelconque et successivement dans le même ordre vertical, les combinaisons de valeurs pour lesquelles $f = 0$. Il suffit alors d'écrire le produit des produels obtenus en remplaçant respectivement dans ce tableau, chaque valeur « 0 » par la variable « x_k » de la même ligne et chaque valeur « 1 » par le complément « $\bar{x}_k$ » de la variable de la même ligne.

Exemple :

Etablir la deuxième forme canonique d'une fonction de trois variables x_1, x_2, x_3, égale à zéro lorsque deux au moins des trois variables sont égales à l'unité.

La table de vérité s'écrit :

x_1	x_2	x_3	f
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Comme nous l'avons indiqué précédemment, nous en tirons le tableau :

x_1	0	1	1	1
x_2	1	0	1	1
x_3	1	1	0	1

d'où la fonction cherchée :

$$f = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_2 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & x_3 & \bar{x}_3 \end{array}\right|$$

2.5. — *Présentation des tables de vérité*

Comme nous l'avons vu, une table de vérité fait apparaître les combinaisons de valeurs des variables qui définissent une fonction binaire. Nous allons préciser dès maintenant la présentation que nous adopterons pour les tables de vérité et les différentes formes qu'elles pourront revêtir.

2.51. — ***Table de vérité complète.*** — Nous dirons qu'une table de vérité est complète lorsqu'elle fait apparaître la totalité des « 2^n » combinaisons de valeurs possibles, relatives aux « n » variables dont dépend la fonction.

Nous conviendrons d'inscrire les valeurs (0 ou 1) que prend la fonction à droite d'un double trait vertical de séparation et sur la même ligne que la combinaison correspondante des valeurs des variables.

Ainsi la table de vérité complète d'une fonction de trois variables, F (a, b, c), peut s'écrire par exemple :

Table de vérité

	a	b	c	F
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Il est souvent intéressant de faire figurer dans une colonne, à gauche, des repères décimaux qui correspondent aux nombres représentés par les chiffres binaires a, b et c, en plaçant ces nombres dans l'ordre naturel. Cette disposition permet, en particulier, de s'assurer qu'aucune combinaison n'a été oubliée.

Une table de vérité complète autorise, en suivant les règles énoncées précédemment, *l'écriture immédiate de la fonction sous ses deux formes canoniques.*

En ce qui concerne l'exemple donné nous pouvons écrire :

$$\mathrm{F} = \left|\begin{array}{l} \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \\ a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \\ a \cdot b \cdot \bar{c} \\ a \cdot b \cdot c \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} a & a & a & \bar{a} \\ b & \bar{b} & \bar{b} & b \\ \bar{c} & c & \bar{c} & \bar{c} \end{array}\right|$$

La première forme utilise les combinaisons pour lesquelles F = 1, (0, 4, 6, 7) et la seconde forme les combinaisons pour lesquelles F = 0, (1, 2, 3, 5).

2.52. — ***Tables de vérité incomplètes.*** — Une fonction binaire est entièrement définie si l'on connaît seulement les combinaisons de valeurs des variables pour lesquelles elle conserve la même valeur (0 ou 1).

Nous appellerons, par définition, table de vérité incomplète, le tableau dans lequel sont inscrites ces combinaisons. Nous préciserons à droite de ce tableau, la valeur correspondante de la fonction. Pour chaque fonction il existe donc deux tables de vérité incomplètes.

Les deux tables de vérité incomplètes qui correspondent à la fonction précédente F (a, b, c) peuvent s'écrire suivant que l'on choisit pour « F » la valeur « 0 » ou la valeur « 1 » :

Table de vérité (F = 1)

	a	b	c	F
0	0	0	0	
4	1	0	0	
6	1	1	0	F = 1
7	1	1	1	

Table de vérité (F = 0)

	a	b	c	F
1	0	0	1	
2	0	1	0	
3	0	1	1	F = 0
5	1	0	1	

Une table de vérité incomplète ne permet d'écrire que l'une des deux formes canoniques. La propriété de dualité la rend cependant suffisante pour définir complètement une fonction binaire.

2.53. — ***Tables de vérité réduites.*** — Ce sont des tables de vérité incomplètes dans lesquelles certaines combinaisons sont groupées afin de tenir compte d'une partie ou de la totalité *des adjacences* qui existent entre elles. Ces adjacences étant repérées dans la table par le symbole « ϕ » qui signifie que la valeur prise par la variable peut être indifféremment « 0 » ou « 1 ». Nous pouvons tirer de l'exemple précédent différentes tables de vérités réduites, parmi lesquelles les deux suivantes :

	a	b	c	F
0–4	ϕ	0	0	} 1
6–7	1	1	ϕ	

	a	b	c	F
1–5	ϕ	0	1	} 0
2–3	0	1	ϕ	

L'adjacence, comme nous le verrons quand nous étudierons les simplifications, a pour effet de supprimer la variable biforme (directe et complémentée) dans le produit ou le produel qui résulte des combinaisons groupées. Une table de vérité réduite ne donne donc plus une forme canonique mais une forme déjà simplifiée. Dans le cas envisagé, nous tirons de la première table de vérité réduite :

$$F = \left| \begin{array}{c} \bar{b} \cdot \bar{c} \\ \\ a \cdot b \end{array} \right|$$

De la seconde table de vérité réduite nous tirons :

$$F = \left| \begin{array}{c|c} b & a \\ \\ \bar{c} & \bar{b} \end{array} \right|$$

2.6. — **Transformations des formes canoniques**

Nous allons examiner maintenant quelques transformations simples que peuvent subir les formes canoniques compte tenu des théorèmes déjà établis.

2.61. — ***Transpositions.*** — Nous avons appelé (2,4) *transposition, le passage, pour une même fonction, de la première à la deuxième forme canonique ou réciproquement.*

Pour transposer une fonction de « n » variables, mise sous forme canonique, il est recommandé d'écrire pour cette fonction, une table de vérité complète en inscrivant les « 2^n » combinaisons de valeurs des variables dans un ordre binaire naturel.

Si une fonction binaire de « n » variables, mise sous la première forme canonique, contient « p » produits, elle contient nécessairement lorsqu'elle est transposée, « q » produels tels que : $p + q = 2^n$.

Il en résulte que la transposition est un moyen de simplification dans le cas où le nombre de produits ou de produels d'une fonction canonique de « n » variables est supérieur à « 2^{n-1} ».

2.62. — ***Complémentations.*** — L'application du théorème de De Morgan permet d'écrire immédiatement la fonction complément d'une forme canonique. Il suffit de remplacer chaque produel par un produit et réciproquement, en complémentant chacune des variables. Les lignes horizontales deviennent des colonnes verticales, les colonnes deviennent des lignes horizontales et les variables se trouvent complémentées. La simplicité de la complémentation résulte de l'aspect dual du symbolisme adopté.

A titre d'exemple, la fonction

$$f = \left| \begin{array}{c|c|c} x_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & x_3 \end{array} \right|$$

peut être complémentée facilement, selon la méthode indiquée, et nous obtenons :

$$\bar{f} = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \end{array} \right|$$

Si la fonction ne se présente pas sous une forme canonique, la méthode de complémentation est identique et reste aussi simple dans son application; ce qu'illustrent les deux exemples suivants :

$$-f_1 = a \left| \begin{array}{c} b \\ \\ \bar{c} \cdot d \end{array} \right| \qquad \bar{f}_1 = \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ \bar{b} \left| \begin{array}{c} c \\ \bar{d} \end{array} \right. \end{array} \right|$$

$$-f_2 = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \left| \begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ \\ x_3 \end{array} \right. \\ \\ x_2 \cdot x_3 \end{array} \right| \qquad \bar{f}_2 = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ \\ \bar{x}_3 \end{array} \right| \begin{array}{c} x_1 \\ \\ x_2 \cdot \bar{x}_3 \end{array} \right|$$

2.7. — *Exercices d'application relatifs au chapitre II*

1° Quelle est l'expression algébrique développée de la fonction $\left| \begin{array}{c} ab \\ \\ c\bar{d} \end{array} \right|$?

Réponse :

$$c - cd + ab - abc + abcd$$

2° Quelle est l'expression algébrique développée de chacune des deux fonctions suivantes :

$$f_1 = \left| \begin{array}{c} a \\ \\ b \end{array} \right| \begin{array}{c} \bar{c} \\ \\ d \end{array} \right| , \qquad f_2 = b \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ c \\ d \end{array} \right| ?$$

Réponses :

$$f_1 = a + b - ab - ac - bc + abc + acd + bcd - abcd$$

$$f_2 = b - ab + abc + abd - abcd$$

3° En partant de l'expression algébrique, $y = c + b \cdot (a - c)$, établir la table de vérité complète relative à la fonction « y » et donner les deux formes canoniques correspondantes.

Réponses :

a	b	c	y
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

première forme canonique : deuxième forme canonique :

$$y = \left| \begin{array}{c} \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \\ a \cdot \bar{b} \cdot c \\ a \cdot b \cdot \bar{c} \\ a \cdot b \cdot c \end{array} \right| \qquad y = \left| \begin{array}{c|c|c|c} a & a & a & \bar{a} \\ b & \bar{b} & \bar{b} & b \\ c & c & \bar{c} & c \end{array} \right|$$

4° Montrer que les fonctions $\left| \begin{array}{c|c} \bar{a} & a \\ b & c \end{array} \right|$ et $\left| \begin{array}{c} a \cdot b \\ \bar{a} \cdot c \end{array} \right|$ admettent la même expression algébrique.

Réponse :

$$\left| \begin{array}{c|c} \bar{a} & a \\ b & c \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} a \cdot b \\ \bar{a} \cdot c \end{array} \right| = ab - ac + c$$

5° Etablir les tables de vérité réduites relatives aux deux fonctions binaires

$$F_1 = \left| \begin{array}{c} a \cdot \bar{b} \\ \bar{a} \cdot c \end{array} \right| \quad \text{et} \quad F_2 = \left| \begin{array}{c|c} a & \bar{a} \\ c & \bar{b} \end{array} \right| .$$

Montrer que F_1 et F_2 admettent la même table de vérité complète et représentent par suite la même fonction.

Réponse :

	a	b	c	$F_1 = F_2$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

6° Pour réaliser un « va et vient » à l'aide de trois interrupteurs x_1, x_2, x_3, on désire que le circuit d'allumage soit fermé ($F = 1$) lorsque le nombre de valeurs « 1 » des variables x_1, x_2, x_3 est impair, et que le circuit soit ouvert ($F = 0$) lorsque le nombre de valeurs « 1 » des variables est pair.

— Ecrire la table de vérité relative à la fonction « F ».

— Quelles sont les deux formes canoniques de « F » ?

Réponses :

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

$$F = \left|\begin{array}{c} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \\ \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \\ x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_1 & \bar{x}_1 & \bar{x}_1 \\ x_2 & \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_2 \\ x_3 & \bar{x}_3 & \bar{x}_3 & x_3 \end{array}\right|$$

7° Etant donnée la forme canonique suivante :

$$F = \left|\begin{array}{c|c} \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} & 0 \\ \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} & 4 \\ \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d & 5 \\ \bar{a} \cdot b \cdot c \cdot \bar{d} & 6 \\ a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \cdot d & 9 \\ a \cdot \bar{b} \cdot c \cdot \bar{d} & 10 \\ a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot \bar{d} & 12 \\ a \cdot b \cdot \bar{c} \cdot d & 13 \\ a \cdot b \cdot c \cdot \bar{d} & 14 \\ a \cdot b \cdot c \cdot d & 15 \end{array}\right.$$

qui groupe les combinaisons 0, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 13, 14, 15, transposer la fonction « F » de manière à obtenir un produit de six produels.

Réponse :

$$F = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} a & a & a & a & \bar{a} & \bar{a} \\ b & b & b & \bar{b} & b & b \\ c & \bar{c} & \bar{c} & \bar{c} & c & \bar{c} \\ \bar{d} & d & \bar{d} & \bar{d} & d & \bar{d} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 11 \end{array}$$

8° On donne la table de vérité réduite suivante :

a	b	c	d	e	f	Φ
0	0	0	ϕ	ϕ	ϕ	
1	1	ϕ	ϕ	ϕ	1	
0	ϕ	ϕ	ϕ	0	0	0
ϕ	ϕ	ϕ	1	1	1	

Ecrire la fonction « Φ » sous la forme d'un produit de produels et indiquer le nombre total de combinaisons qui apparaîtrait dans la table de vérité incomplète pour $\Phi = 0$, en précisant le nombre décimal associé à chaque combinaison et en prenant les variables dans l'ordre a, b, c, d, e, f.

Réponses :

$$\Phi = \begin{array}{|c|c|c|c|} a & \bar{a} & a & \bar{d} \\ b & \bar{b} & e & \bar{e} \\ c & \bar{f} & f & \bar{f} \end{array}$$

La table de vérité incomplète relative à $\Phi = 0$ grouperait 27 combinaisons correspondant dans l'ordre aux nombres décimaux : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 15, 16, 20, 23, 24, 28, 31, 39, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63.

9° Pour déverrouiller la bobine de sécurité de la porte d'accès à la cabine d'un transformateur haute tension ($p = 1$ au déverrouillage), on désire que le disjoncteur « D » d'alimentation du transformateur et que le sectionneur « S » de liaison, soient ouverts (D = S = 0).

Etablir la table de vérité complète de la fonction « p » et donner les deux formes canoniques correspondantes.

Réponses :

D	S	p
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$, \quad p = \bar{D} \cdot \bar{S} = \left| \begin{array}{c|c|c} D & \bar{D} & \bar{D} \\ \bar{S} & S & \bar{S} \end{array} \right| .$$

10° Ecrire les compléments des fonctions suivantes :

$$f_1 = \left| \begin{array}{c} a \cdot b \\ \bar{c} \cdot d \cdot \bar{e} \end{array} \right| \qquad f_2 = \left| \begin{array}{c|c} & \bar{x}_2 \\ x_1 & \\ & x_3 \\ x_2 & \\ & x_4 \end{array} \right| \qquad f_3 = \left| \begin{array}{c|c|c} a & \bar{a} & \bar{a} \\ \bar{b} & b & b \\ c & \bar{c} & c \end{array} \right|$$

Réponses :

$$\bar{f}_1 = \left| \begin{array}{c|c} & c \\ \bar{a} & \\ & \bar{d} \\ \bar{b} & \\ & e \end{array} \right| \qquad \bar{f}_2 = \left| \begin{array}{c} x_1 \cdot \bar{x}_2 \\ x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \end{array} \right| \qquad \bar{f}_3 = \left| \begin{array}{c} \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \\ a \cdot \bar{b} \cdot c \\ a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \end{array} \right|$$

11° Calculer l'expression algébrique développée de la fonction $f = a \cdot \left| \begin{array}{c} \bar{b} \\ \bar{c} \end{array} \right|$.

Déduire de cette expression une table de vérité réduite correspondant à $f = 0$ puis la table de vérité complète donnant « f ». Ecrire « f » sous la première forme canonique.

Réponses :

— table de vérité réduite

a	b	c	f
o	ϕ	ϕ	0
ϕ	1	1	0

— expression algébrique

$$\boxed{f = a - a\,b\,c}$$

a	b	c	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

— première forme canonique.

$$f = \left| \begin{array}{c} a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \\ a \cdot \bar{b} \cdot c \\ a \cdot b \cdot \bar{c} \end{array} \right|$$

CHAPITRE III

SIMPLIFICATION DES FONCTIONS BINAIRES

Par simplification des fonctions binaires, nous entendrons la réduction du nombre des éléments littéraux; c'est-à-dire la simplification, en dehors de toute considération technologique, des expressions symboliques écrites.

Le but poursuivi sera donc en général, la recherche et l'élimination des termes *redondants :* en définissant comme tel tout terme qui peut être supprimé dans une fonction binaire sans lui apporter de modification numérique relativement aux combinaisons de valeurs des variables indépendantes.

Les simplifications devront être les conséquences démontrables des propriétés algébriques des produits et des produels. Parmi les méthodes essentielles nous étudierons en particulier les simplifications par *mise en facteur et développements, par adjacences, par transpositions et par consensus* qui sont des méthodes fondamentales et simples et s'avèrent suffisantes dans la plupart des cas.

3.1. — ***Mise en facteur et développements***

L'ensemble binaire « E_{01} » définit un anneau commutatif automorphe, puisque « $E_{01} = E_{10}$ » et que l'on a choisi deux lois algébriques internes de composition qui sont le produit, « $P = x \cdot y$ », et le produel :

$$\pi = 1 - (1 - x) \cdot (1 - y) = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}.$$

Il est intéressant de démontrer la propriété algébrique de distributivité du produel par rapport au produit et réciproquement, du produit par rapport au produel. *Cette réciprocité, qui résulte de la propriété fondamentale de dualité, est une caractéristique essentielle et particulièrement intéressante des ensembles binaires.*

3.11. — ***Mise en facteur dans un produel.*** — Considérons le produel :

$$F = \begin{vmatrix} \varphi \cdot f_1 \\ \varphi \cdot f_2 \end{vmatrix} = 1 - (1 - \varphi \cdot f_1) \cdot (1 - \varphi \cdot f_2).$$

L'expression algébrique développée s'écrit :
$F = \varphi \cdot f_1 + \varphi \cdot f_2 - \varphi^2 \cdot f_1 \cdot f_2$, en utilisant le théorème d'idempotence $\varphi^2 = \varphi$, $F = \varphi \cdot f_1 + \varphi \cdot f_2 - \varphi \cdot f_1 \cdot f_2$ que nous pouvons écrire :

$$F = \varphi \cdot [1 - (1 - f_1) \cdot (1 - f_2)] = \varphi \cdot \left| \begin{array}{c} f_1 \\ \\ f_2 \end{array} \right|$$

Ainsi se trouve démontrée l'identité réciproque :

$$\boxed{\left| \begin{array}{c} \varphi \cdot f_1 \\ \\ \varphi \cdot f_2 \end{array} \right| \equiv \varphi \cdot \left| \begin{array}{c} f_1 \\ \\ f_2 \end{array} \right|}$$

Nous appellerons « *mise en facteur* » le passage de la première expression à la seconde et « *développement* » ou « *produits effectués* » le passage inverse.

L'identité précédente peut être étendue à un produel contenant un nombre quelconque de produits admettant « φ » comme facteur commun.

Soit en effet la fonction, $F = \left| \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_q \\ P_{q+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{array} \right|$,

dans laquelle, $P_1 = \varphi \cdot f_1$, $P_2 = \varphi \cdot f_2$, ..., $P_q = \varphi \cdot f_q$, $q \leqslant n$. Appelons $P'_{12} = \varphi \cdot \left| \begin{array}{c} f_1 \\ \\ f_2 \end{array} \right|$, la fonction obtenue en mettant « φ » en facteur dans les deux premiers produits P_1 et P_2.

En groupant « P'_{12} » et « P_3 », nous pouvons à nouveau mettre « φ » en facteur et nous obtenons $P'_{123} = \varphi \cdot \left| \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} \right|$, et ainsi de suite jusqu'à « P_q ». Ce qui permet d'écrire l'identité :

$$\boxed{\left| \begin{array}{c} \varphi \cdot f_1 \\ \varphi \cdot f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi \cdot f_q \\ P_{q+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \varphi \cdot \left| \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_q \end{array} \right| \\ P_{q+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_n \end{array} \right|}$$

Ainsi se trouve démontrée *la distributivité du produit par rapport au produel.*

3.12. — ***Mise en « facteur dual » dans un produit.*** — Considérons la fonction : $F = \left| \begin{array}{c} \varphi \\ \\ f_1 \end{array} \right| \begin{array}{c} \varphi \\ \\ f_2 \end{array} \right|$

Le développement algébrique de « F » s'écrit :

$$F = [1 - (1 - \varphi) \cdot (1 - f_1)] \cdot [1 - (1 - \varphi) \cdot (1 - f_2)]$$

$$= 1 - (1 - \varphi) \cdot (1 - f_1) - (1 - \varphi) \cdot (1 - f_2) + (1 - \varphi)^2 \cdot (1 - f_1) \cdot (1 - f_2)$$

Le théorème d'idempotence permet d'écrire $(1 - \varphi)^2 = (1 - \varphi)$, d'où l'expression de « F » :

$$F = 1 - (1 - \varphi) \cdot [(1 - f_1) + (1 - f_2) - (1 - f_1) \cdot (1 - f_2)]$$

$$= 1 - (1 - \varphi) \cdot (1 - f_1 \cdot f_2) = \left| \begin{array}{c} \varphi \\ \\ f_1 \cdot f_2 \end{array} \right|$$

Nous avons ainsi démontré l'identité réciproque :

$$\boxed{\left|\begin{array}{c}\varphi\\ \\ f_1\end{array}\right|\left|\begin{array}{c}\varphi\\ \\ f_2\end{array}\right| \equiv \left|\begin{array}{c}\varphi\\ \\ f_1 \cdot f_2\end{array}\right|}$$

Nous appellerons *« mise en facteur dual »*, le passage de la première expression à la seconde et *« produels effectués »* ou *« développement dual »* le passage inverse.

Comme pour le produel, l'identité précédente peut être étendue à un produit contenant un nombre quelconque de produels admettant « φ » comme « facteur dual » commun.

Soit :

$$\pi = \pi_1 \cdot \pi_2 \dots \pi_q \cdot \pi_{q+1} \dots \pi_n$$

avec $\pi_1 = \left|\begin{array}{c}\varphi\\ \\ f_1\end{array}\right|, \ \pi_2 = \left|\begin{array}{c}\varphi\\ \\ f_2\end{array}\right|, \ \dots, \ \pi_q = \left|\begin{array}{c}\varphi\\ \\ f_q\end{array}\right|, \ q \leqslant n.$

Nous pouvons de proche en proche mettre « φ » en facteur dual dans les produels π_1, π_2, ..., π_q, et obtenir finalement l'identité

$$\boxed{\left|\begin{array}{c}\varphi\\ \\ f_1\end{array}\right|\left|\begin{array}{c}\varphi\\ \\ f_2\end{array}\right| \dots \left|\begin{array}{c}\varphi\\ \\ f_q\end{array}\right| \cdot \pi_{q+1} \dots \pi_n \equiv \left|\begin{array}{c}\varphi\\ \\ f_1 \cdot f_2 \dots f_q\end{array}\right| \cdot \pi_{q+1} \dots \pi_n}$$

Nous avons ainsi démontré *la distributivité du produel par rapport au produit.*

3.2. — ***Simplifications élémentaires des fonctions binaires***

La propriété réciproque de distributivité des produits et produels va nous permettre de tirer un certain nombre de conséquences et de théorèmes élémentaires relatifs à la simplification des fonctions binaires.

3.21. — ***Simplifications par développement.*** — Si la mise en facteur fournit en général une forme simplifiée des fonctions binaires, l'opération inverse par développement peut, dans les cas que nous allons envisager, fournir également des simplifications intéressantes.

*1*er **cas.**

$$\varphi \cdot \left| \begin{array}{c} f \\ \\ A \cdot \bar{\varphi} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \varphi \cdot f \\ \\ A \cdot \varphi \cdot \bar{\varphi} \end{array} \right| = \varphi \cdot f$$

Dans le cas particulier, souvent rencontré où $A = 1$, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\varphi \cdot \left| \begin{array}{c} f \\ \\ \bar{\varphi} \end{array} \right| = \varphi \cdot f}$$

*2*e **cas.**

$$\left| \begin{array}{l} \quad \varphi \\ \\ f \cdot \left| \begin{array}{c} B \\ \\ \bar{\varphi} \end{array} \right| \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} & \left| \begin{array}{c} \varphi \\ \bar{\varphi} \\ B \end{array} \right| \\ \varphi & \\ f & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \varphi \\ \\ f \end{array} \right|$$

Dans le cas particulier où $B = 0$ nous pouvons écrire :

$$\boxed{\left| \begin{array}{c} \varphi \\ \\ f \cdot \bar{\varphi} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \varphi \\ \\ f \end{array} \right|}$$

3.22. — ***Implications.*** — Nous savons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un produit binaire soit égal à l'unité, est que chacun des facteurs soit égal à l'unité.

$$(P = f_1 \cdot f_2 \ldots f_n = 1) \Leftrightarrow (f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 1)$$

Nous pouvons donc appeler chaque facteur $f_1, f_2, \ldots, f_n$, *implicant direct*, ou *implicant* de la fonction « P ».

— *Toute fonction partielle pouvant être mise en facteur dans une fonction donnée, sera donc un implicant de cette dernière.*

Nous savons également que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un produel soit nul, est que chaque facteur dual soit égal à zéro.

$$\left(\pi = \left| \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{array} \right| = 0 \right) \Leftrightarrow (f_1 = f_2 = \ldots = f_n = 0)$$

— *Toute fonction partielle pouvant être mise en facteur dual dans une fonction donnée sera par définition un implicant dual de cette dernière.*

— Considérons le produit ayant pour facteurs un produel et l'un de ses implicants duals. $F = \varphi \cdot \left| \begin{matrix} \varphi \\ \\ f \end{matrix} \right|$. « 0 » étant l'élément neutre du produel, nous pouvons écrire.

$$\varphi = \left| \begin{matrix} \varphi \\ \\ 0 \end{matrix} \right| \qquad \text{et} \qquad F = \left| \begin{matrix} \varphi \\ \\ 0 \end{matrix} \right| \begin{matrix} \varphi \\ \\ f \end{matrix} \right| .$$

En mettant « φ » en facteur dual nous obtenons

$$F = \left| \begin{matrix} \varphi \\ \\ 0 \cdot f \end{matrix} \right| = \varphi$$

De même le produel ayant pour facteurs duals un produit et l'un de ses implicants, s'écrit

$$F' = \left| \begin{matrix} \varphi \\ \\ \varphi . f \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} \varphi \cdot 1 \\ \\ \varphi . f \end{matrix} \right| = \varphi \cdot \left| \begin{matrix} 1 \\ \\ f \end{matrix} \right| = \varphi$$

Nous tirons de ces égalités les deux théorèmes suivants :

3.23. — ***Théorèmes.*** — *Le produit d'une fonction binaire et de l'un quelconque de ses implicants duals, est égal à cet implicant dual.*

$$\boxed{\varphi \left| \begin{matrix} \varphi \\ \\ f \end{matrix} \right| = \varphi}$$

Le produel d'une fonction binaire et de l'un quelconque de ses implicants directs, est égal à cet implicant.

$$\boxed{\left| \begin{matrix} \varphi \\ \\ \varphi \cdot f \end{matrix} \right| = \varphi}$$

3.24. — ***Adjacences.*** — *Deux produits « P_1 » et « P_2 » sont dits adjacents lorsque l'on peut passer de l'un à l'autre en complémentant l'un des facteurs et ce facteur seulement.*

$$P_1 = \varphi \cdot f \qquad P_2 = \bar{\varphi} \cdot f$$

Nous pouvons également par dualité définir l'adjacence pour des produels.

Deux produels « π_1 » et « π_2 » sont dits adjacents lorsque l'on peut passer de l'un à l'autre en complémentant l'un des facteurs duals et ce facteur seulement.

$$\pi_1 = \left|\begin{array}{c} \varphi \\ f \end{array}\right| \qquad \pi_2 = \left|\begin{array}{c} \bar{\varphi} \\ f \end{array}\right|$$

3.25. — ***Théorèmes.*** — *Le produel de deux produits adjacents est égal au facteur commun aux deux produits.*

$$\left|\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \varphi \cdot f \\ \bar{\varphi} \cdot f \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \varphi \\ \bar{\varphi} \end{array}\right| \cdot f = f$$

Le produit de deux produels adjacents est égal au facteur dual commun aux deux produels.

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = \left|\begin{array}{c|c} \varphi & \bar{\varphi} \\ f & f \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \varphi \cdot \bar{\varphi} \\ f \end{array}\right| = f$$

La fonction « φ » est appelée « *fonction adjacente* » ou « *variable adjacente* » lorsqu'il s'agit d'une simple variable.

3.3. — *Méthodes générales de simplification utilisant la mise en facteur*

Compte tenu de la propriété de commutativité des produits et des produels, les mises en facteur sont des opérations qui peuvent s'effectuer en cascade, dans un ordre quelconque mais qui ne mènent pas nécessairement à une forme optimale des fonctions binaires.

3.31. — ***Exemples de simplifications par mises en facteur.*** — Considérons le produit de produels suivant :

$$F_1 = \left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_3 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_4 \\ f_7 \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{array}\right|$$

« F_1 » peut s'écrire après mise en facteur dual de « f_1 » puis de « f_7 » :

$$F_1 = -\left|\begin{array}{l} f_1 \\ f_3 - \left|\begin{array}{l} f_4 - \left|\begin{array}{l} f_5 \\ f_6 \end{array}\right| \\ f_7 \end{array}\right| \end{array}\right| - \; = \; -\left|\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} f_7 \\ f_4 - \left|\begin{array}{l} f_6 \\ f_5 \end{array}\right| \end{array}\right| - f_3 \\ f_1 \end{array}\right| -$$

Lorsque les fonctions ne remplissent pas complètement l'espace qu'elles occupent entre les deux traits verticaux qui symbolisent les produels, on peut compléter par des traits continus horizontaux comme cela est indiqué dans les expressions simplifiées de la fonction « F_1 » ci-dessus.

— Considérons d'autre part le produel de produits :

$$F_2 = \left|\begin{array}{c} f_1 \cdot f_4 \cdot f_7 \\ f_1 \cdot f_5 \cdot f_6 \cdot f_7 \\ f_1 \cdot f_3 \end{array}\right|$$

En mettant successivement « f_7 » et « f_1 » en facteur, nous obtenons :

$$F_2 = - f_1 - \left|\begin{array}{l} f_7 - \left|\begin{array}{l} f_4 \\ f_5 \cdot f_6 \end{array}\right| \\ f_3 \end{array}\right| - \; = \; -\left|\begin{array}{l} f_3 \\ f_7 - \left|\begin{array}{l} f_5 \cdot f_6 \\ f_4 \end{array}\right| \end{array}\right| - f_1 -$$

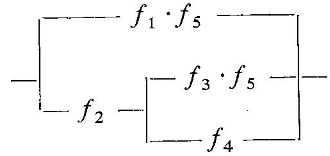
— Les produits et les produels sont commutatifs, les colonnes ou les lignes des fonctions binaires peuvent être permutées entre elles et par suite les mises en facteur peuvent s'effectuer aussi bien en partant de la droite qu'en partant de la gauche pour un produit, et les mises en facteur dual, en partant du haut ou en partant du bas pour un produel.

Ces mises en facteur peuvent même se faire simultanément à droite et à gauche pour la première forme (produit), ou en haut et en bas pour la deuxième forme (produel). *Cette façon de procéder introduit une solution étrangère.*

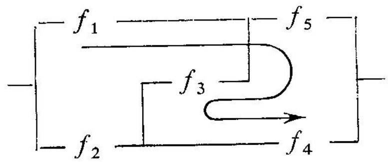
> Il y a donc lieu de s'assurer que la solution étrangère introduite dans la simplification obtenue correspond à un produit nul.

Considérons en effet la fonction

$$F = \left| \begin{array}{c} f_1 \cdot f_5 \\ \\ f_2 \cdot f_3 \cdot f_5 \\ \\ f_2 \cdot f_4 \end{array} \right| =$$



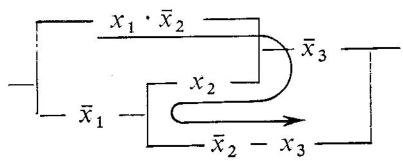
Si l'on met, dans cette fonction, « f_5 » en facteur à droite, la simplification obtenue, (*)



fait apparaître suivant le parcours indiqué par la flèche le produit $f_1 \cdot f_3 \cdot f_4$ qui n'était pas contenu initialement dans la fonction proposée. Cette simplification ne peut pas être effectuée si $f_1 \cdot f_3 \cdot f_4 \neq 0$.

Nous pouvons par contre effectuer une simplification par mise en facteur à droite et à gauche, dans la fonction suivante :

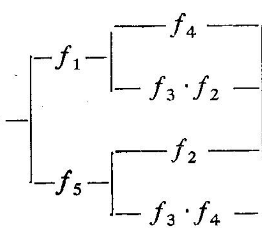
$$\left| \begin{array}{c} x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \\ \\ \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \\ \\ \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \end{array} \right| =$$

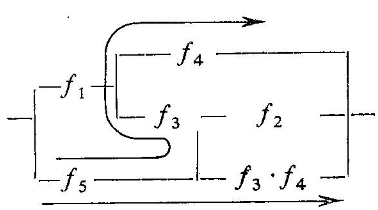


Le produit $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$ indiqué par la flèche est identiquement nul puisqu'il contient en facteur deux variables complémentaires x_2 et $\bar{x}_2$. Il n'y a donc pas de modification introduite dans la fonction initiale et la simplification obtenue est valable.

Notons que dans certains cas, la solution particulière introduite est *redondante* et permet d'améliorer la simplification. C'est le cas de la fonction suivante :

$$F = \left| \begin{array}{l} f_1 \cdot f_4 \\ \\ f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \\ \\ f_5 \cdot f_2 \\ \\ f_5 \cdot f_3 \cdot f_4 \end{array} \right| =$$



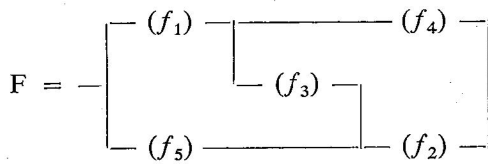


---

* *N. B.* — Le trait vertical d'un produel, quand il n'est pas en extrémité, est équivalent au symbole d'un produit (.). Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{array}{l} — a \;| \\ |\; b \;| \\ |\; c — \end{array} = a \, . \, b \, . \, c$$

Les deux parcours indiqués par les flèches, correspondent au même produit «$f_5 \cdot f_3 \cdot f_4$». Le produit «$f_3 \cdot f_4$» en facteur dual de «f_2» peut, en conséquence, être supprimé sans que la fonction soit modifiée. Nous obtenons donc finalement :



Le symbolisme choisi permet ainsi, par des mises en facteur simultanées de part et d'autre des expressions binaires, d'établir des liens étroits avec la topologie et d'aboutir à des expressions simples ayant l'aspect de schémas.

Notons cependant que ces simplifications particulières n'offrent d'intérêt que pour des circuits utilisant une technologie où les éléments sont à commande isolée (relais électromagnétiques, optoélectroniques ou transformateurs). Ce n'est pas le cas des circuits électroniques utilisant des semi-conducteurs des types diode et transistor.

*3.4. — **Décomposition des fonctions binaires par rapport aux variables***

Il est intéressant, dans un but de simplification, d'étudier les différentes formes que peut revêtir une fonction binaire relativement à une variable indépendante.

*3.41. — **Définitions.*** — Nous dirons, par définition, qu'une *fonction est monoforme par rapport à la variable* « x » si cette variable intervient dans la fonction sous une seule de ses formes binaires (directe ou complémentée).

Nous dirons dans ce cas que « x » *est une variable monoforme* de la fonction.

$$f_1 \cdot \begin{vmatrix} x \\ f_2 \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} \bar{x} \cdot \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{vmatrix}$$

sont des *fonctions monoformes* par rapport à la variable « x » à condition que f_1, f_2, φ_1 et φ_2 soient des fonctions indépendantes de « x ».

Nous appellerons *fonction biforme par rapport à la variable* « x », toute fonction binaire dans laquelle la variable « x » intervient à la fois sous ses deux formes (directe et complémentée) et nous dirons que « x » est une *variable biforme* de la fonction.

$$\varphi_1 \cdot \left|\begin{array}{c|c} x & \bar{x} \\ f_1 & f_2 \end{array}\right| \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} \bar{x} \cdot f_1 \\ x \cdot f_2 \\ \varphi_1 \end{vmatrix}$$

sont des *fonctions biformes* par rapport à la variable « x ».

Nous dirons qu'une fonction binaire est *un produit monoforme* de la variable « x » lorsque « x », ou « $\bar{x}$ », est *un implicant direct de cette fonction.*

— $F = \bar{x} \cdot A$ est un *produit monoforme de la variable* « x ».

Un *produel monoforme* de la variable « x » admet cette variable ou son complément comme *implicant dual.*

— $F' = \left|\begin{array}{c} x \\ \\ B \end{array}\right|$ est un *produel monoforme de la variable* « x ».

Nous appellerons *fonction carrée biforme*, une fonction biforme comprenant quatre termes groupés en carré suivant un produit de deux produels de deux facteurs duals, ou suivant un produel de deux produits de deux facteurs directs

— $\left|\begin{array}{c} \varphi \cdot A \\ \\ \bar{\varphi} \cdot B \end{array}\right|$ et $\left|\begin{array}{c|c} \varphi & \bar{\varphi} \\ & \\ A_1 & B_1 \end{array}\right|$ sont des *fonctions carrées biformes en* « φ ».

3.42. — ***Propriétés des fonctions carrées biformes (*).*** — Les *fonctions carrées biformes* ont un aspect dual qui laisse prévoir des propriétés particulièrement intéressantes.

Toute fonction peut s'écrire sous la forme d'une fonction carrée biforme.

$$— f_1 \cdot \left|\begin{array}{c} x \\ \\ f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x} \cdot x & x \\ & \\ f_1 & f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} \bar{x} & x & x \\ & & \\ f_1 & f_1 & f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x} & x \\ & \\ f_1 & f_1 \cdot f_2 \end{array}\right|$$

$$— \left|\begin{array}{c} \bar{x} \cdot \varphi_1 \\ \\ \varphi_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \bar{x} \cdot \varphi_1 \\ \\ \left.\begin{array}{c} \bar{x} \\ \\ x \end{array}\right| \cdot \varphi_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \bar{x} \cdot \left|\begin{array}{c} \varphi_1 \\ \\ \varphi_2 \end{array}\right. \\ \\ x \cdot \varphi_2 \end{array}\right|$$

$$— \varphi_1 \cdot \left|\begin{array}{c|c} x & \bar{x} \\ & \\ f_1 & f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} x \cdot \bar{x} & x & \bar{x} \\ & & \\ \varphi_1 & f_1 & f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} x & \bar{x} \\ & \\ \varphi_1 \cdot f_1 & \varphi_1 \cdot f_2 \end{array}\right|$$

(*) L'algèbre de Boole ne peut pas mettre en évidence d'une façon simple les propriétés fondamentales des fonctions carrées biformes qui ont une symétrie duale particulière et sont extrêmement utiles pour la simplification des circuits de commutation.

$$-\left|\begin{array}{c}\bar{x}\cdot f_1\\ x\cdot f_2\\ \varphi_1\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\bar{x}\cdot f_1\\ x\cdot f_2\\ \begin{array}{c|c}\begin{array}{c}\bar{x}\\ x\end{array} & \varphi_1\end{array}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\bar{x}\cdot\left|\begin{array}{c}f_1\\ \varphi_1\end{array}\right.\\ x\cdot\left|\begin{array}{c}f_2\\ \varphi_1\end{array}\right.\end{array}\right|$$

Si une *fonction carrée biforme* se présente sous la forme d'un produit de produels,

$$P = \left|\begin{array}{c|c}\varphi & \bar{\varphi}\\ A & B\end{array}\right|$$

nous pouvons l'écrire sous la forme de produel de produits en effectuant les produits élémentaires :

$$P = \left|\begin{array}{c}\varphi\cdot B\\ A\cdot\bar{\varphi}\\ A\cdot B\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\varphi\cdot B\\ A\cdot\bar{\varphi}\\ \begin{array}{c|c}A\cdot B & \begin{array}{c}\varphi\\ \bar{\varphi}\end{array}\end{array}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\varphi\cdot\left|\begin{array}{c}B\\ A\cdot B\end{array}\right.\\ \bar{\varphi}\cdot\left|\begin{array}{c}A\\ A\cdot B\end{array}\right.\end{array}\right|$$

$$\left|\begin{array}{c}B\\ A\cdot B\end{array}\right| = B\,, \quad \left|\begin{array}{c}A\\ A\cdot B\end{array}\right| = A,$$

d'où

$$P = \left|\begin{array}{c}\varphi\cdot B\\ A\cdot\bar{\varphi}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c}\varphi & B\\ A & \bar{\varphi}\end{array}\right|$$

Nous avons ainsi établi le théorème suivant; théorème fondamental et très important qui va permettre la recherche systématique des implicants directs et duals d'une fonction, par la méthode des consensus.

3.43. — **Théorème.** — *Une fonction carrée biforme n'est pas modifiée par la suppression ou le tracé d'un trait vertical médian, à condition de disposer les facteurs complémentaires suivant une diagonale du carré correspondant à son expression symbolique.*

$$\boxed{\left|\begin{array}{c}\varphi\cdot B\\ A\cdot\bar{\varphi}\end{array}\right| \equiv \left|\begin{array}{c|c}\varphi & B\\ A & \bar{\varphi}\end{array}\right|}$$

$$F = \left|\begin{array}{c|c}\varphi & f_1\\ f_2 & \bar{\varphi}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\varphi\, f_1\\ \cancel{\varphi\,\bar{\varphi}}\\ f_2\, f_1\\ f_2\,\bar{\varphi}\end{array}\right| = \left|\begin{array}{c}\varphi\, f_1\\ f_2\,\bar{\varphi}\\ f_1\, f_2\end{array}\right|$$

Les facteurs « A » et « B » sont appelés simplement *facteurs diagonaux* de la fonction carrée biforme.

Ce théorème nous permet de passer ainsi facilement d'un produel à un produit et vice-versa, sans introduire de terme redondant. Ce qui justifie l'attention particulière consacrée à l'étude des fonctions carrées biformes.

3.5. — Simplifications par la méthode des « consensus » (*)

Etant donnée une fonction carrée biforme, on appelle « *consensus* » de cette fonction, le produit des termes diagonaux non complémentaires, et « *consensus dual* », le produel des termes diagonaux non complémentaires.

La fonction carrée biforme

$$F = \left|\begin{array}{c|c} \varphi & f_1 \\ f_2 & \bar{\varphi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \varphi \cdot f_1 \\ \bar{\varphi} \cdot f_2 \end{array}\right|$$

admet pour « consensus » le produit $f_1 \cdot f_2$, et pour « consensus dual » le produel $\left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right|$. En procédant par produits effectués, nous pouvons écrire :

$$F = \left|\begin{array}{c} \varphi \cdot f_1 \\ f_2 \cdot \bar{\varphi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} \varphi & f_1 & f_1 \\ f_2 & \bar{\varphi} & f_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \varphi \cdot f_1 \\ f_2 \cdot \bar{\varphi} \\ f_2 \cdot f_1 \end{array}\right|.$$

oui

Le consensus $f_1 \cdot f_2$ est donc un implicant dual de « F » et le consensus dual $\left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right|$ est un implicant de « F ». Nous en déduisons les théorèmes suivants.

3.51. — Théorèmes. — 1° *Si parmi les facteurs d'un produit, il existe une fonction carrée biforme et un terme contenant en facteur dual, le consensus dual de cette fonction; ce dernier terme est redondant et peut être supprimé.*

2° *Si parmi les facteurs duals d'un produel, il existe une fonction carrée biforme et un terme contenant en facteur le consensus de cette fonction, ce dernier terme est redondant et peut être supprimé.*

(*) Rappelons pour mémoire qu'une théorie complète des consensus, dans le formalisme de l'algèbre de Boole, a été développée par Monsieur Tison.

$$= \left|\begin{array}{c} \varphi\, f_1 \\ f_2\, \bar{\varphi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \varphi & f_1 \\ f_2\, \bar{f} & f_2\, \bar{\varphi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} \varphi & \cancel{\varphi} & f_1 & f_1 \\ f_2 & \cancel{f} & f_2 & \bar{f} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} \varphi & f_1 & f_1 \\ f_2 & \bar{\varphi} & f_2 \end{array}\right|$$

Nous pouvons écrire en effet :

$$\left|\begin{array}{c|c} & k \\ \varphi \cdot f_1 & f_1 \\ f_2 \cdot \bar{\varphi} & f_2 \end{array}\right| \cdot f_3 \dots f_n = \left|\begin{array}{c|c|c} & 0 & k \\ \varphi \cdot f_1 & f_1 & f_1 \\ f_2 \cdot \bar{\varphi} & f_2 & f_2 \end{array}\right| \cdot f_3 \dots f_n$$

$$= \left|\begin{array}{c|c} \varphi \cdot f_1 & f_1 \\ f_2 \cdot \bar{\varphi} & f_2 \end{array}\right| \cdot f_3 \dots f_n$$

$$= \left|\begin{array}{c} \varphi \cdot f_1 \\ f_2 \cdot \bar{\varphi} \end{array}\right| \cdot f_3 \dots f_n$$

De même :

$$\left|\begin{array}{c} \varphi \cdot f_1 \\ f_2 \cdot \bar{\varphi} \\ k \cdot f_1 \cdot f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \varphi \cdot f_1 \\ f_2 \cdot \bar{\varphi} \\ 1 \cdot f_2 \cdot f_1 \\ k \cdot f_1 \cdot f_2 \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \varphi \cdot f_1 \\ f_2 \cdot \bar{\varphi} \\ f_2 \cdot f_1 \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \varphi \cdot f_1 \\ f_2 \cdot \bar{\varphi} \\ f_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{array}\right|$$

3.52. — ***Règles générales des « consensus ».*** — Donnons-nous la fonction carrée biforme :

$$\mathrm{F} = \left|\begin{array}{c|c} \varphi & f_2 \\ f_1 & \bar{\varphi} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \varphi \cdot f_2 \\ f_1 \cdot \bar{\varphi} \end{array}\right|$$

1° Le *consensus* « $f_1 \cdot f_2$ » mis sous la forme d'un produel de produits, traduit, lorsque l'un de ces produits apparaît en facteur dans un terme facteur dual de « F », une condition suffisante pour affirmer que ce terme est redondant et peut être supprimé.

2° Le *consensus dual* $\left|\begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \end{array}\right|$ mis sous la forme d'un produit de produels, traduit, lorsque l'un de ces produels apparaît en facteur dual dans un terme facteur de « F », une condition suffisante pour affirmer que ce terme est redondant et peut être supprimé.

Supposons que le consensus de la fonction carrée biforme « F » soit mis sous la forme d'un produel de « q » produits;

$$f_1 \cdot f_2 = \left| \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_q \end{array} \right| ,$$

et que le consensus dual soit mis sous la forme d'un produit de « r » produels;

$$\left| \begin{array}{c} f_1 \\ \\ f_2 \end{array} \right| = \pi_1 \cdot \pi_2 \ldots \pi_j \ldots \pi_r$$

Si la fonction « F » est en facteur dual d'un terme de la forme « $\mathrm{A}p_k$ », ce terme est redondant.

Nous pouvons écrire en effet dans ce cas :

$$\left| \begin{array}{c} \mathrm{F} \\ \\ \mathrm{A} \cdot p_k \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \mathrm{F} \\ f_1 \cdot f_2 \\ \mathrm{A} \cdot p_k \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \mathrm{F} \\ p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ p_k \\ \cdot \\ \cdot \\ p_q \\ \mathrm{A} \cdot p_k \end{array} \right|$$

« p_k » implicant de « $\mathrm{A} \cdot p_k$ », est en facteur dual et nous savons que

$$\left| \begin{array}{c} p_k \\ \\ \mathrm{A} \cdot p_k \end{array} \right| = p_k$$

d'où :

$$\left| \begin{array}{c} \mathrm{F} \\ \\ f_1 \cdot f_2 \\ \\ \mathrm{A} \cdot p_k \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \mathrm{F} \\ \\ f_1 \cdot f_2 \end{array} \right| = \mathrm{F}.$$

Si la fonction « F » est en facteur d'un terme de la forme $\left|\begin{matrix} B \\ \pi_j \end{matrix}\right|$, nous pouvons écrire :

$$F \cdot \left|\begin{matrix} B \\ \pi_j \end{matrix}\right| = F \cdot \left|\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} B \\ \pi_j \end{matrix}\right| = F \cdot \pi_1 \cdot \pi_2 \dots \pi_j \cdot \left|\begin{matrix} B \\ \pi_j \end{matrix}\right| \cdot \pi_{j+1} \dots \pi_r$$

π_j est un implicant dual du produel $\left|\begin{matrix} B \\ \pi_j \end{matrix}\right|$

donc,

$$F \cdot \left|\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} B \\ \pi_j \end{matrix}\right| = F \cdot \left|\begin{matrix} f_1 \\ f_2 \end{matrix}\right| = F.$$

3.53. — ***Exemple de simplification par consensus.*** — Considérons la fonction

$$F_1 = \left|\begin{array}{l|l} B \cdot C \cdot F & \\ D \cdot \overline{C} \cdot F & D \\ D \cdot B \cdot E & B \\ A \cdot \overline{C} & \overline{C} \\ D \cdot \overline{A} & \overline{F} \\ A \cdot B & \end{array}\right| .$$

Il existe, dans le premier facteur de « F_1 » deux variables biformes « C » et « A » et nous pouvons faire apparaître successivement les deux fonctions carrées biformes :

$$\left|\begin{array}{c} C \cdot B \cdot F \\ \left.\begin{array}{c} D \cdot F \\ A \end{array}\right| \overline{C} \end{array}\right| \quad \text{et} \quad \left|\begin{array}{c} A \cdot \left|\begin{array}{c} \overline{C} \\ B \end{array}\right. \\ D \cdot \overline{A} \end{array}\right|$$

qui admettent respectivement pour *consensus;*

$$\left|\begin{matrix} B \cdot D \cdot F \\ A \cdot B \cdot F \end{matrix}\right|, \quad \left|\begin{matrix} D \cdot \overline{C} \\ D \cdot B \end{matrix}\right|,$$

et admettent pour *consensus dual* :

$$\left|\begin{array}{c} A \\ D \\ B \end{array}\right| \begin{array}{c} A \\ F \end{array} \Bigg| \qquad \text{et} \qquad \left|\begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \end{array}\right|$$

Nous voyons, par le consensus de la fonction carrée biforme en « A », consensus égal à $\left|\begin{array}{c} D\cdot B \\ D\cdot\bar{C} \end{array}\right|$, que les termes $D\cdot\bar{C}\cdot F$ et $D\cdot B\cdot E$ peuvent être supprimés. Nous pouvons donc écrire :

$$F_1 = \left|\begin{array}{c|c} A\cdot\left|\begin{array}{c} \bar{C} \\ B \end{array}\right. & \begin{array}{c} D \\ B \end{array} \\ D\cdot\bar{A} & \bar{C} \\ B\cdot C\cdot F & \bar{F} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c} A & \bar{C} & \begin{array}{c} D \\ B \end{array} \\ & B & \bar{C} \\ D & \bar{A} & \bar{F} \end{array} \\ B\cdot C\cdot F \end{array}\right|$$

A | C̄ B Ā | D B C F
D
B C F

Le produel $\left|\begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \\ \bar{F} \end{array}\right|$ contient le consensus dual $\left|\begin{array}{c} D \\ B \\ \bar{C} \end{array}\right|$

2 consensus qui peuvent disparaître
A C̄
C BF
consensus A.B.F

d'où,

$$F_1 = \left|\begin{array}{c} \begin{array}{c|c} A & \bar{C} \\ & B \\ D & \bar{A} \end{array} \\ B\cdot C\cdot F \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} A\cdot\bar{C} \\ A\cdot B \\ D\cdot\bar{A} \\ B\cdot C\cdot F \end{array}\right|$$

A C̄
A B
~~A Ā~~
~~D C̄~~
~~D B~~
D Ā
BCF

A C̄
A B
D Ā
~~A B C F~~
Ā B C F

Nous pouvons encore écrire :

$$F_1 = \left|\begin{array}{c|c} A & \bar{A} \\ D & B \\ B\cdot C\cdot F & \bar{C} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c|c} A & A & A & \bar{A} \\ D & D & D & B \\ B & C & F & \bar{C} \end{array}\right|$$

A | C̄ B
D | Ā
BCF

La recherche des consensus conduit souvent à la simplification optimale des fonctions binaires. Elle complète utilement les méthodes de simplification par mises en facteur, transpositions et adjacences.

Ces quatre méthodes combinées permettent, en général, lorsqu'elles sont utilisées judicieusement, d'obtenir des formes minimales.

3.6. — *Simplifications par adjacences*

Les simplifications par adjacences sont les premières qui ont été utilisées en algèbre de « Boole ». Elles étaient, alors, les plus faciles à mettre en œuvre et ont donné naissance à différentes méthodes comme celle établie par « Quine et Mc Cluskey » ou celle des diagrammes de « Venn » et de « Veitch » que nous citons simplement pour mémoire.

Nous développerons, par contre, la méthode des diagrammes de « Karnaugh » parce que ces diagrammes sont assimilables aux tracés de tables de vérité particulières dans lesquelles les adjacences sont topologiquement groupées ou bien se correspondent géométriquement par symétrie.

Le diagramme de Karnaugh se présente sous la forme d'un carré ou d'un rectangle selon la parité du nombre des variables. L'ensemble des variables est généralement partagé en deux sous-ensembles contenant, à une unité près, le même nombre de variables.

Au nombre de combinaisons de valeurs de ces deux sous-ensembles, on fait correspondre, respectivement, le nombre des cases de chacun des côtés du rectangle ou du carré. Il suffit ensuite de ranger les combinaisons de valeurs des variables dans un ordre respectant les adjacences par groupements ou symétries comme le précisent les exemples suivants :

Cas de deux variables.

A \ B	0	1
0	0	1
1	2	3

Cas de trois variables.

A \ BC	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Cas de quatre variables.

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Cas de cinq variables.

axe de symétrie ↓ (entre 010 et 110)

AB \ CDE	000	001	011	010	110	111	101	100
00	0	1	3	2	6	7	5	4
01	8	9	11	10	14	15	13	12
11	24	25	27	26	30	31	29	28
10	16	17	19	18	22	23	21	20

Il est intéressant, comme cela est fait sur les exemples traités, de repérer chaque case par l'équivalent décimal du nombre binaire associé à la combinaison de valeurs qui lui correspond.

Pour utiliser le diagramme de « Karnaugh », on porte dans chacune des cases du carré ou du rectangle, la valeur que prend la fonction binaire envisagée pour la combinaison de valeurs des variables qui correspond justement à cette case. Puis on constitue une table de vérité réduite, soit par rapport aux « 0 », soit par rapport aux « 1 » de la fonction selon ce qui paraît le plus simple, en tenant compte des adjacences possibles qui sont localisées avec facilité grâce à la distribution topologique particulière du diagramme. Il suffit ensuite d'établir la fonction à partir de la table de vérité réduite. Avec un peu d'habitude, on peut tirer la fonction directement du diagramme sous forme de produits ou de produels.

La méthode du diagramme de « Karnaugh » est intéressante et permet des simplifications rapides, mais présente l'inconvénient de n'utiliser que les adjacences comme mode de recherche des implicants. Le choix des groupements et des symétries reste arbitraire et la méthode des mises en facteur et celle des consensus la complètent utilement.

3.61. — ***Exemples.*** — Les variables étant rangées dans l'ordre A, B, C, D, écrire à l'aide du diagramme de « Karnaugh » la fonction binaire simplifiée égale à zéro pour les combinaisons 3 (0011), 7 (0111), 8 (1000), 9 (1001), 14 (1110) et 15 (1111) des valeurs des variables.

On trace le diagramme de Karnaugh pour les quatre variables A, B, C et D. On inscrit « 0 » dans les cases correspondant à 3, 7, 8, 9, 14 et 15 et « 1 » dans les autres cases.

AB \ CD	00	01	11	10
00	1 0	1 1	0 3	1 2
01	1 4	1 5	0 7	1 6
11	1 12	1 13	0 15	0 14
10	0 8	0 9	1 11	1 10

En groupant les cases adjacentes 3-7, 8-9 et 14-15 on obtient la table de vérité réduite suivante :

Combinaisons groupées	A	B	C	D	F
3– 7	0	ϕ	1	1	0
8– 9	1	0	0	ϕ	0
14–15	1	1	1	ϕ	0

Ce qui permet d'écrire :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c} A & \bar{A} & \bar{A} \\ \bar{C} & B & \bar{B} \\ \bar{D} & C & \bar{C} \end{array}\right|$$

Mais on peut aussi bien grouper les cases adjacentes

0–1–4–5, 0–2–4–6, 4–5–12–13, 10–11

et l'on obtient la table de vérité réduite relative aux « 1 » de la fonction binaire.

Combinaisons groupées :	A	B	C	D	F
0–1– 4– 5	0	ϕ	0	ϕ	1
0–2– 4– 6	0	ϕ	ϕ	0	1
4–5–12–13	ϕ	1	0	ϕ	1
10–11	1	0	1	ϕ	1

Ce qui donne :

$$F = \left|\begin{array}{c} \bar{A}\cdot\bar{C} \\ \bar{A}\cdot\bar{D} \\ B\cdot\bar{C} \\ A\cdot\bar{B}\cdot C \end{array}\right|$$

En utilisant les propriétés des fonctions carrées biformes, on peut écrire successivement :

$$F = \left|\begin{array}{c} \bar{A}\cdot\bar{C} \\ \bar{A}\cdot\bar{D} \\ \bar{A}\cdot B\cdot\bar{C} \\ A\cdot B\cdot\bar{C} \\ A\cdot\bar{B}\cdot C \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{A} & \begin{array}{c}\bar{C} \\ \bar{D} \\ B\cdot\bar{C}\end{array} \\ \begin{array}{c} B\cdot\bar{C} \\ C\cdot\bar{B}\end{array} & A \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \bar{A} & A \\ \begin{array}{c|c} B & \bar{C} \\ C & \bar{B}\end{array} & \begin{array}{c}\bar{C} \\ \bar{D}\end{array} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c|c} \bar{A} & \bar{A} & A \\ B & \bar{B} & \bar{C} \\ C & \bar{C} & \bar{D} \end{array}\right|$$

Le diagramme de Karnaugh se révèle vraiment utile dans le cas où les fonctions binaires sont incomplètement définies et présentent un certain nombre de combinaisons de variables disponibles qui ne sont jamais réalisées et pour lesquelles nous pouvons attribuer à la fonction aussi bien la valeur « 1 » que la valeur « 0 » selon les simplifications possibles.

Donnons-nous, par exemple, une fonction de cinq variables x_5, x_4, x_3, x_2, x_1 rangées dans l'ordre inverse des indices pour pouvoir leur faire correspondre les puissances de « 2 » des nombres binaires associés.

Il s'agit d'écrire la fonction binaire « F » égale à l'unité pour les combinaisons 1–3–7–8–10–12–17–20.

— Les combinaisons disponibles sont les suivantes :

0–5–6–9–11–14–16–18–21–22.

La fonction est égale à zéro pour les combinaisons qui n'ont pas été considérées, c'est-à-dire :

2–4–13–15–19–23–24–25–26–27–28–29–30–31.

Les données permettent de tracer le diagramme de Karnaugh suivant

x_5x_4 \ $x_3x_2x_1$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	ϕ 0	1 1	1 3	0 2	ϕ 6	1 7	ϕ 5	0 4
01	1 8	ϕ 9	ϕ 11	1 10	ϕ 14	0 15	0 13	1 12
11	0 24	0 25	0 27	0 26	0 30	0 31	0 29	0 28
10	ϕ 16	1 17	0 19	ϕ 18	ϕ 22	0 23	ϕ 21	1 20

Nous pouvons tirer du diagramme, la table de vérité réduite relative aux valeurs « 1 » de la fonction « F » en utilisant au mieux les combinaisons disponibles repérées par le symbole « ϕ ».

Combinaisons groupées :	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	F
1– 3– 5– 7	0	0	ϕ	ϕ	1	1
8–10–12–14	0	1	ϕ	ϕ	0	1
16–17–20–21	1	0	ϕ	0	ϕ	1

d'où :

$$F = \left|\begin{array}{c} \bar{x}_5 \cdot \bar{x}_4 \cdot x_1 \\ \bar{x}_5 \cdot x_4 \cdot \bar{x}_1 \\ x_5 \cdot \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} \bar{x}_5 \cdot & \left|\begin{array}{c} \bar{x}_4 \cdot x_1 \\ \bar{x}_1 \cdot x_4 \end{array}\right| \\ \bar{x}_4 \cdot & \bar{x}_2 \cdot x_5 \end{array}\right|$$

$$F = \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_4 \\ x_5 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_5 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_1 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} \bar{x}_4 \\ \bar{x}_5 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_5 \end{array}\right|$$

x_5 est consensus

$x_4 \bar{x}_4 x_5$

Nous pouvons également dresser une table de vérité réduite relative aux zéro de la fonction « F » en utilisant les combinaisons disponibles

Combinaisons groupées :	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1	F
0– 2– 4– 6	0	0	ϕ	ϕ	0	0
9–11–13–15–25–27–29–31	ϕ	1	ϕ	ϕ	1	0
24–25–26–27–28–29–30–31	1	1	ϕ	ϕ	ϕ	0
18–19–22–23–26–27–30–31	1	ϕ	ϕ	1	ϕ	0

d'où :

$$F = \left| \begin{array}{c} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \right| \begin{array}{c|c|c} \bar{x}_1 & \bar{x}_4 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_4 & \bar{x}_5 & \bar{x}_5 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_1 & \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_5 \\ x_4 & \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 \\ x_5 & \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_5 \end{array} \right|$$

Nous pouvons également écrire « F » sous la forme : du 1er tableau F = 1 p. 60

8,10,12,14

1,3,5,7

$$F = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_5 \cdot \bar{x}_1 \cdot x_4 \\ \bar{x}_5 \cdot x_1 \cdot \bar{x}_4 \\ x_5 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 \end{array} \right| = -\left| \begin{array}{c} \bar{x}_5 \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \cdot x_4 \\ x_1 \left| \bar{x}_4 \right. \end{array} \right. \\ x_5 \cdot \bar{x}_2 \end{array} \right| -$$

3.7. — *Simplifications par transpositions, mises en facteur et adjacences.*

Nous avons constaté dans ce qui précède que les transpositions, les mises en facteur et les adjacences sont des moyens qui permettent d'opérer des simplifications sur les fonctions binaires.

La méthode que nous proposons réunit ces trois moyens de façon efficace et systématique. Elle permet de simplifier une fonction binaire mise sous forme canonique avec le maximum de rapidité.

Nous savons qu'une *forme canonique* est en général une *fonction carrée biforme* lorsque l'une des variables a été mise en facteur partielle *

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left| \begin{array}{c} x_i \cdot G \\ H \cdot \bar{x}_i \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} x_i & G \\ H & \bar{x}_i \end{array} \right|$$

Si « F » est une fonction canonique, « H » et « G » sont également des fonctions canoniques qui ne contiennent plus la variable « x_i ».

$$\left| \begin{array}{l} G = G(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ H = H(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \end{array} \right.$$

* La mise en facteur partielle correspond à une disjonction.

Elles sont donc également *carrées biformes* et les fonctions diagonales résiduelles sont toujours des fonctions canoniques sur lesquelles il est donc possible d'effectuer des transpositions.

Soit « p » le nombre de produits ou de produels élémentaires d'une fonction canonique. Le nombre total des variables littérales qui apparaissent dans la fonction est égal à « $p \cdot n$ » si « n » désigne le nombre des variables indépendantes.

Le nombre total de variables littérales qui apparaissent après la mise en facteur partielle de la variable « x_i » est égal à :

$\underline{p\ (n - 1) + 2}$, si « x_i » est une variable biforme, et

$\underline{p\ (n - 1) + 1}$, si « x_i » est une variable monoforme.

Une fonction binaire peut être simplifiée, en opérant successivement des mises en facteur partielles, des transpositions et des réductions par adjacences.

Supposons, en effet, que la fonction canonique de « n » variables F (x_1, x_2, ..., x_n) contenant « p » termes tels que $p = 2^{n-1} - m$ (« m » entier, positif, inférieur à 2^{n-1}), soit écrite sous forme de fonction carrée biforme par mise en facteur partielle de la variable « x_i » de telle manière que les deux fonctions diagonales « H » et « G » contiennent respectivement p_o et p_1 termes (produits ou produels).

Nous avons nécessairement $p_o + p_1 = p = 2^{n-1} - m$. Les « p_o » et « p_1 » termes contiennent chacun les ($n - 1$) variables (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n).

3.71. — ***Si $p_0 < 2^{n-2}$ et $p_1 < 2^{n-2}$, aucune transposition ne peut être envisagée.*** — S'il existe un nombre « a » ($a < p_0$ et $a < p_1$) d'adjacences relatives à la variable « x_i »; c'est-à-dire un nombre « a » de termes communs aux fonctions « H » et « G », on peut opérer une simplification par adjacences, le nombre total réduit des variables littérales étant égal à :

$$N_1 = (p - a)\ (n - 1) + 2 \text{ lorsque } p_o \text{ et } p_1 \text{ sont différents de zéro}$$

et $N_1 = p\ (n - 1) + 1$, dans le cas où « x_i » est monoforme et où l'une des valeurs p_o ou p_1 est nulle ainsi que « a ».

La simplification par adjacences relative à la variable « x_i », après mise en facteur partielle, fournit donc une réduction des variables littérales égale à :

$$\Delta\ N_1 = p\ (n - 1) + 2 - (p - a)\ (n - 1) - 2$$

$$\boxed{\Delta\ N_1 = a\ (n - 1)}$$

3.72. — **Supposons par contre** $2^{n-2} < p_0$. — ($p_0 = 2^{n-2} + k$, k entier positif et inférieur à 2^{n-2}).

Dans ces conditions, la fonction diagonale « H » qui comprend, $p_o = 2^{n-2} + k$ termes, peut être transposée et le nombre des termes, après transposition, est égal à :

$$p_2 = 2^{n-1} - p_o = 2^{n-2} - k$$

Le nombre total des variables littérales qui apparaissent dans la fonction « F » ainsi simplifiée, est alors égal à :

$N_2 = (p_2 + p_1)(n-1) + 2$ lorsque « x_i » est biforme

$N_2 = p_2 (n-1) + 1$ lorsque « x_i » est monoforme.

La simplification par transposition après mise en facteur partielle de la variable « x_i » fournit donc une réduction des variables littérales égale à :

$$\begin{aligned} \Delta N_2 &= p(n-1) + 2 - (p_2 + p_1)(n-1) - 2 \\ &= (p - p_2 - p_1)(n-1) = (p_o - p_2)(n-1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta N_2 = 2k(n-1)}$$

« ΔN_2 » est maximal, lorsque « k » est maximal et nous remarquons que :

$$\begin{aligned} | p_o - p_1 | &= | 2p_o - (p_o + p_1) | = | 2p_o - p | \\ &= | 2(2^{n-2} + k) - 2^{n-1} + m | = | 2k + m | \end{aligned}$$

Il suffit donc, pour obtenir la simplification optimale par transposition, de faire une mise en facteur partielle par rapport à l'une des variables ou à la variable pour laquelle le module de la différence $| p_o - p_1 |$ est maximal.

3.73. — **Théorème.** — *Lorsqu'une fonction binaire mise sous forme canonique, est simplifiée par mise en facteur partielle d'une variable, suivie d'une réduction par transposition; la simplification est optimale lorsque la mise en facteur partielle a été faite par rapport à une variable pour laquelle le module de la différence* $| p_o - p_1 |$ *est maximal. Dans cette formule «* p_o *» peut représenter le nombre de fois que la variable est écrite sous forme directe, et «* p_1 *» le nombre de fois qu'elle est écrite sous forme complémentée, dans la fonction avant mise en facteur.*

3.74. — **Méthode pratique.** — Pour opérer en pratique une simplification par transpositions mises en facteur et adjacences, on procède de la manière suivante :

— On écrit d'abord la fonction sous forme canonique si elle ne l'était pas, et on la transpose dans le cas où le nombre de termes (produits ou produels élémentaires) est supérieur à « 2^{n-1} » (n étant le nombre de variables). On calcule ensuite, pour chaque variable, le module $|\ p_o - p_1\ |$. On écrit la fonction carrée biforme relative à la variable, ou à l'une des variables « x_i » qui correspond au maximum du module $|\ p_0 - p_1\ |$.

« H » et « G » étant les fonctions diagonales de la fonction carrée biforme obtenue, on détermine le nombre « a » des termes communs à ces fonctions diagonales.

Si « H » et « G » ne sont pas réductibles par transposition, on simplifie par adjacences en écrivant selon les cas :

$$\left|\begin{array}{c} x_i \cdot H_1 \\ \\ G_1 \cdot \bar{x}_i \\ \\ J_1 \end{array}\right| \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{c|c} x_i & H_1 \\ & \\ G_1 & \bar{x}_i \end{array}\right| \cdot K_1$$

« H_1 » et « G_1 » étant obtenues à partir des fonctions « H » et « G » en supprimant dans ces dernières les termes communs. J_1 et K_1 représentent donc respectivement et selon le cas, le produel ou le produit des termes communs à « G » et « H ».

— Lorsque l'une des fonctions diagonales, « H » par exemple, est réductible par transposition, c'est-à-dire que le nombre de termes qu'elle comprend est égal à $2^{n-2} + k$, on calcule « k » que l'on compare au nombre d'adjacences « a ».

— Si $2k \leqslant a$, on procède comme précédemment.

— Si $a < 2k$, on transpose la fonction « H » mais on écrit « G_1 » et « J_1 » ou « K_1 » en tenant compte des adjacences.

En appelant « H_t » la fonction transposée de « H » ($H_t = H$), on obtient selon le cas :

$$\left|\begin{array}{c} x_i \cdot H_t \\ \\ G_1 \cdot \bar{x}_i \\ \\ J_1 \end{array}\right| \quad \text{ou} \quad \left|\begin{array}{c|c} x_i & H_t \\ & \\ G_1 & \bar{x}_i \end{array}\right| \cdot K_1$$

On poursuit la simplification en répétant les mêmes opérations pour les fonctions canoniques H_t, H_1, G_1, J_1 ou K_1 jusqu'à épuisement du nombre des variables.

3.75. — ***Exemples.*** — Simplifier la fonction F (a, b, c, d) égale à l'unité pour les combinaisons de valeurs binaires qui correspondent aux nombres 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 13 des quatre variables rangées dans l'ordre ~~d, b, c, a.~~

d, c, b, a — La fonction, écrite sous la première forme canonique, comprendrait dix produits alors que le nombre total de combinaisons de valeurs des quatre variables est égal à $2^3 = 16$.

$2^4 = 16$

Nous pouvons donc simplifier par transposition en écrivant la fonction sous la deuxième forme canonique qui comporte les $16 - 10 = 6$ combinaisons complémentaires 0, 1, 8, 11, 14 et 15.

$$F = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} a & \bar{a} & a & \bar{a} & a & \bar{a} \\ b & b & b & \bar{b} & \bar{b} & \bar{b} \\ c & c & c & c & \bar{c} & \bar{c} \\ d & d & \bar{d} & \bar{d} & \bar{d} & \bar{d} \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 8 & 11 & 14 & 15 \end{array}$$

Le calcul des modules $| p_o - p_1 |$ fournit :

— pour « a » $| p_o - p_1 | = 0$

— pour « b » $| p_o - p_1 | = 0$

— pour « c » $| p_o - p_1 | = 2$

— pour « d » $| p_o - p_1 | = 2$

Nous pouvons donc mettre « c » ou « d » en facteur dual. Etablissons la fonction carrée biforme relative à « d » par exemple :

$$F = \left| \begin{array}{cc|cccc} \multicolumn{2}{c|}{d} & \multicolumn{4}{c}{\bar{d}} \\ a & \bar{a} & a & \bar{a} & a & \bar{a} \\ b & b & b & \bar{b} & \bar{b} & \bar{b} \\ c & c & c & c & \bar{c} & \bar{c} \end{array} \right|$$

Nous constatons qu'il existe une adjacence, indiquée par les flèches, mais que les fonctions diagonales ne sont pas susceptibles d'être simplifiées par transposition.

Nous écrirons donc :

d

$$F = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} & & \bar{a} & a & \bar{a} \\ & d & \bar{b} & \bar{b} & \bar{b} \\ a & \bar{a} & c & \bar{c} & \bar{c} \\ b & b & & & \\ c & c & & \bar{d} & \end{array} \right|$$

Sans qu'il soit besoin de calculer les valeurs des modules $| p_o - p_1 |$, nous voyons que $\bar b$ peut être mis en facteur dual dans la fonction diagonale :

$$\left|\begin{array}{c|c|c} \bar a & a & \bar a \\ \bar b & \bar b & \bar b \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \bar b \\ \begin{array}{c|c|c} \bar a & a & \bar a \\ c & \bar c & \bar c \end{array} \end{array}\right|$$

$\left|\begin{array}{c|c|c} \bar a & a & \bar a \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right|$ peut être simplifiée par transposition.

Cette fonction est égale au complément du produel $\left|\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\right|$ qui n'y figure pas et qui correspond à la quatrième combinaison possible des deux variables « a » et « c ».

$$\left|\begin{array}{c|c|c} \bar a & a & \bar a \\ c & \bar c & \bar c \end{array}\right| = \overline{\left|\begin{array}{c} a \\ c \end{array}\right|} = \bar a \cdot \bar c$$

Finalement :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c} a & d & \bar b \\ b & \bar a & \bar a \cdot \bar c \\ c & b & \bar d \\ & c & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} c & \bar b \\ a \cdot d & \bar a \cdot \bar c \\ b & \bar d \end{array}\right|$$

Nous pouvons, en pratique, opérer directement sur les tables de vérité. Nous pouvons, en ce qui concerne l'exemple proposé, écrire la table de vérité incomplète qui correspond aux valeurs « zéro » de la fonction « F » et qui comprend les $16 - 10 = 6$ combinaisons repérées par les nombres décimaux 0, 1, 8, 11, 14 et 15.

	d	c	b	a	F
0	0	0	0	0	
1	0	0	0	1	
8	1	0	0	0	0
→ 11	1	0	1	1	
14	1	1	1	0	
→ 15	1	1	1	1	
valeurs de $\| p_o - p_1 \|$	2	2	0	0	

adjacence relative à « c »

variable choisie pour la mise en facteur dual

Le calcul des modules $| p_o - p_1 |$ nous indique que nous devons mettre « d » ou « c » en facteur. Choisissant « c » nous pouvons écrire,

$$F = \left| \begin{array}{c|c} c & \bar{c} \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{array} \right| \cdot C_1.$$

« C_1 » correspond à une seule adjacence et s'écrit $C_1 = \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ \bar{b} \\ \bar{d} \end{array} \right|$.

« φ_1 » et « φ_2 » ne se simplifient pas par transposition et nous pouvons établir, après réduction par adjacence, les tables de vérité incomplètes suivantes :

	d	b	a	φ_1
	0	0	0	
	0	0	1	0
	1	0	0	
$\| p_o - p_1 \|$	1	3	1	

variable
à mettre en
facteur dual

d	b	a	φ_2
1	1	0	0

Nous tirons de ces tables, $\varphi_1 = \left| \begin{array}{c} b \\ \varphi_3 \end{array} \right|$ et $\varphi_2 = \left| \begin{array}{c} a \\ \bar{b} \\ \bar{d} \end{array} \right|$.

La fonction « φ_3 » peut être simplifiée par transposition puisqu'elle fait apparaître trois combinaisons distinctes des deux variables « a » et « d » alors qu'il en existe $2^2 = 4$ au total.

d	a	φ_3
1	1	1

$$\varphi_3 = a \cdot d$$

Nous pouvons écrire ainsi :

$$F = \left| \begin{array}{c|c|c} b & a & \bar{a} \\ c & \bar{b} & \bar{b} \\ a \cdot d & \bar{c} & \bar{d} \\ & \bar{d} & \end{array} \right|$$

Après mise en facteur dual de $\left| \begin{array}{c} \bar{b} \\ \bar{d} \end{array} \right|$, nous obtenons,

$$F = \left| \begin{array}{c|c} b & \bar{b} \\ c & \bar{d} \\ a \cdot d & \bar{a} \cdot \bar{c} \end{array} \right|$$

En utilisant les propriétés des fonctions carrées biformes, nous pouvons écrire également,

$$F = \left| \begin{array}{l} b \cdot \left| \begin{array}{c} \bar{d} \\ \bar{a} \cdot \bar{c} \end{array} \right. \\ \\ \bar{b} \cdot \left| \begin{array}{c} c \\ a \cdot d \end{array} \right. \end{array} \right|$$

— N.B. Il résulte de l'étude qui vient d'être faite que les formes de produits de produels ou inversement, de produels de produits, correspondent très rarement à des formes optimales relativement aux variables littérales. Dans le cas qui nous occupe, les formes $F = \left| \begin{array}{c|c|c|c} a & b & \bar{a} & \bar{b} \\ b & c & \bar{b} & \bar{c} \\ c & d & \bar{d} & \bar{d} \end{array} \right|$ et $F = \left| \begin{array}{c} c \cdot \bar{b} \\ a \cdot \bar{b} \cdot d \\ \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \\ b \cdot \bar{d} \end{array} \right|$, comprennent respectivement 12 et 10 variables littérales. Elles ne sont pas optimales, puisque nous pouvons les réduire à huit variables par mise en facteur partielle. Ce résultat montre l'impossibilité d'obtenir des formes optimales par la simple recherche des implicants premiers comme l'avaient cru Quine, Mc. Cluskey ou Scheinman.

Nous en concluons que tout espoir d'optimisation passe d'abord, et nécessairement, par la connaissance approfondie des propriétés des fonctions binaires et aussi de leurs applications technologiques.

3.8. — *Fonctions carrées*

La propriété des fonctions carrées biformes qui permet de passer très simplement d'un produit à un produel ou vice-versa, peut s'étendre à une fonction carrée sous certaines conditions.

Nous allons rechercher les conditions générales auxquelles doivent satisfaire les termes f_1, f_2, f_3, et f_4 d'une fonction carrée pour que soit vérifiée l'identité :

$$\left|\begin{array}{c|c} f_1 & f_2 \\ & \\ f_4 & f_3 \end{array}\right| \equiv \left|\begin{array}{c} f_1 \cdot f_2 \\ \\ f_4 \cdot f_3 \end{array}\right|.$$

Cette identité mise sous forme algébrique s'écrit :

$$[1 - (1 - f_1)\cdot(1 - f_4)]\cdot[1 - (1 - f_2)\cdot(1 - f_3)]$$
$$\equiv 1 - (1 - f_1 \cdot f_2)\cdot(1 - f_4 \cdot f_3)$$

Ce qui donne, après simplification :

$$f_1 \cdot f_3 \cdot (1 - f_2)\cdot(1 - f_4) + f_2 \cdot f_4 \cdot (1 - f_1)\cdot(1 - f_3) \equiv 0$$

Théorème. — La condition nécessaire et suffisante pour que l'identité $\left|\begin{array}{c|c} f_1 & f_2 \\ & \\ f_4 & f_3 \end{array}\right| \equiv \left|\begin{array}{c} f_1 \cdot f_2 \\ \\ f_4 \cdot f_3 \end{array}\right|$ soit vérifiée est que les termes f_1, f_2, f_3 et f_4 qui apparaissent dans les fonctions carrées, vérifient simultanément les deux identités :

$$f_1 \cdot f_3 \cdot \bar{f}_2 \cdot \bar{f}_4 \equiv 0$$

et

$$f_2 \cdot f_4 \cdot \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_3 \equiv 0$$

Les solutions du type $f_1 = f_2$, $f_1 = f_4$, $f_3 = f_2$ ou $f_3 = f_4$, conduisent à des mises en facteur direct ou dual très simples.

Notons que les fonctions carrées « biformes » correspondent aux deux cas particuliers où :

$$(f_1 \cdot f_3 \equiv 0, \quad \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_3 \equiv 0) \Leftrightarrow (f_1 \equiv \bar{f}_3)$$
$$(f_2 \cdot f_4 \equiv 0, \quad \bar{f}_2 \cdot \bar{f}_4 \equiv 0) \Leftrightarrow (f_2 \equiv \bar{f}_4)$$

Parmi les nombreuses solutions possibles, il est intéressant de retenir celles qui correspondent respectivement aux relations :

$$f_1 \cdot f_3 \equiv f_2 \cdot f_4 \equiv 0 \text{ et}$$

$$\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_3 \equiv \bar{f}_2 \cdot \bar{f}_4 \equiv 0 \quad \text{soit} \quad \left|\begin{array}{c} f_1 \\ \\ f_3 \end{array}\right| \equiv \left|\begin{array}{c} f_2 \\ \\ f_4 \end{array}\right| \equiv 1$$

Si, dans une fonction binaire mise sous forme « carrée », les produits des termes diagonaux sont respectivement nuls ou leurs produels respectivement égaux à l'unité, nous pouvons écrire :

$$\boxed{\left|\begin{array}{c|c} f_1 & f_2 \\ & \\ f_4 & f_3 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} f_1 \cdot f_2 \\ \\ f_4 \cdot f_3 \end{array}\right|}$$

Les conditions précédentes sont en particulier vérifiées lorsque :

$$f_1 = \mathrm{A}_o \cdot \varphi_o, \quad f_2 = \mathrm{A}_1 \cdot \varphi_1, \quad f_3 = \mathrm{B}_o \cdot \bar{\varphi}_o \quad \text{et} \quad f_4 = \mathrm{B}_1 \cdot \bar{\varphi}_1$$

ou lorsque :

$$f_1 = \left|\begin{array}{c} \mathrm{A}_o \\ \\ \varphi_o \end{array}\right|, \quad f_2 = \left|\begin{array}{c} \mathrm{A}_1 \\ \\ \varphi_1 \end{array}\right|, \quad f_3 = \left|\begin{array}{c} \mathrm{B}_o \\ \\ \bar{\varphi}_o \end{array}\right| \quad \text{et} \quad f_4 = \left|\begin{array}{c} \mathrm{B}_1 \\ \\ \bar{\varphi}_1 \end{array}\right|$$

Cela entraîne différentes égalités qu'il est intéressant d'utiliser au cours de simplifications; telles les égalités suivantes :

$$\left|\begin{array}{c} \varphi_o \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_p \cdot \bar{\varphi}_1 \\ \\ \varphi_1 \cdot b_1 \cdot b_2 \ldots b_q \cdot \bar{\varphi}_o \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} \varphi_o \cdot a_1 \cdot a_2 \ldots a_i & a_{i+1} \ldots a_p \cdot \bar{\varphi}_1 \\ \\ \varphi_1 \cdot b_1 \cdot b_2 \ldots b_j & b_{j+1} \ldots b_q \cdot \bar{\varphi}_o \end{array}\right|, \quad \forall\,(i, j)$$

ou

$$\left|\begin{array}{c|c} \varphi_o & \varphi_1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_p & b_p \\ \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_o \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \begin{array}{c|c} \varphi_o & \varphi_1 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_i & b_j \end{array} \\ \\ \begin{array}{c|c} a_{i+1} & b_{j+1} \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ a_p & b_q \\ \bar{\varphi}_1 & \bar{\varphi}_o \end{array} \end{array}\right|, \quad \forall\,(i, j)$$

Les produits et les produels étant commutatifs, les permutations respectives des facteurs ou des facteurs duals permettent d'obtenir d'autres égalités de même forme sous réserve d'écrire toujours des termes complémentaires aux extrémités des diagonales des fonctions carrées.

3.9. — **Exercices d'application relatifs au chapitre III**

1° On donne la table de vérité incomplète suivante :

	A	B	C	D	F
— 3	0	0	1	1	
— 9	1	0	0	1	
— 11	1	0	1	1	1
— 13	1	1	0	1	
— 15	1	1	1	1	

Ecrire la fonction « F » sous forme canonique puis la simplifier en utilisant le diagramme de « Karnaugh ».

Vérifier la simplification par la méthode des transpositions, mises en facteur et adjacences.

Réponses :

$$F = D \cdot \left| \begin{array}{c} A \\ \bar{B} \cdot C \end{array} \right|$$

2° On considère le produel des produits de quatre variables A, B, C, D (première forme canonique) qui correspondent aux combinaisons π (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15).

— Transposer la fonction (deuxième forme canonique).

— La simplifier en utilisant la méthode des transpositions, mises en facteur et adjacences.

— Vérifier la simplification par la méthode de « Karnaugh ».

Réponses :

$$\pi = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} A & A & A & A & \bar{A} \\ B & B & B & B & B \\ C & C & \bar{C} & \bar{C} & \bar{C} \\ D & \bar{D} & D & \bar{D} & \bar{D} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} B \\ A \cdot \left| \begin{array}{c} \bar{C} \\ \bar{D} \end{array} \right| \end{array} \right|$$

3° Simplifier par la méthode des « consensus », la fonction suivante :

$$F = \begin{array}{|c|c|} \begin{array}{c} A \\ \overline{C} \\ D \end{array} & \begin{array}{c} A \cdot B \\ A \cdot C \cdot D \\ B \cdot \overline{C} \cdot D \\ \overline{B} \cdot C \cdot D \end{array} \end{array}$$

Réponses :

$$F = \left| \begin{array}{c} A \cdot B \\ B \cdot \overline{C} \cdot D \\ \overline{B} \cdot C \cdot D \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} B \cdot \left| \begin{array}{c} A \\ \overline{C} \cdot D \end{array} \right. \\ C \cdot D \cdot \overline{B} \end{array} \right|$$

$$F = \begin{array}{|c|c|c|c|} \begin{array}{c} A \\ \overline{B} \\ \overline{C} \end{array} & \begin{array}{c} A \\ D \end{array} & \begin{array}{c} B \\ C \end{array} & \begin{array}{c} B \\ D \end{array} \end{array}$$

4° On donne la table de vérité réduite suivante :

x_o	x_1	x_2	x_3	x_4	f
1	0	ϕ	1	0	
0	1	1	ϕ	ϕ	
1	0	1	ϕ	ϕ	
ϕ	0	0	1	ϕ	1
ϕ	ϕ	0	1	1	
1	1	ϕ	1	1	
1	1	1	ϕ	ϕ	

— Ecrire la fonction « f » qui correspond à cette table de vérité.

— Calculer les « consensus » relatifs à chaque fonction carrée biforme de chacune des variables.

— Simplifier la fonction en utilisant les consensus calculés et l'écrire successivement sous forme de produit de produels et sous forme de produel de produits en constatant qu'elle est carrée biforme en « x_2 ».

Réponses :

— consensus relatif à « x_o » — $x_1 \cdot x_2$

— consensus relatif à « x_1 » — $\left| \begin{array}{l} x_o \cdot x_2 \\ \\ x_o \cdot x_3 \cdot x_4 \end{array} \right|$

— consensus relatif à « x_2 » — $\left| \begin{array}{l} x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot x_3 \\ \\ x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 \end{array} \right|$

il n'existe pas de consensus relatif à « x_3 » qui est monoforme.

— consensus relatif à « x_4 » — $x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$

fonction simplifiée :

$$f = \left| \begin{array}{c} x_o \\ x_1 \\ \bar{x}_2 \end{array} \right| \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ x_4 \end{array} \right. \end{array} \right|$$

$$f = \left| \begin{array}{c} x_o \\ x_1 \\ \bar{x}_2 \end{array} \right| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{array} \left| \begin{array}{c} x_2 \\ x_3 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{l} x_o \cdot x_2 \\ x_1 \cdot x_2 \\ \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \\ \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \end{array} \right|$$

5° Simplifier les fonctions :

$$f_1 = \left| \begin{array}{c} A \cdot B \\ \bar{B} \cdot \bar{C} \\ C \cdot A \end{array} \right|, \quad f_2 = \left| \begin{array}{c} A \cdot B \\ C \cdot \bar{A} \\ A \cdot \bar{D} \\ D \cdot \bar{C} \\ C \cdot A \end{array} \right|$$

$$f_3 = \left| \begin{array}{l} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\ x_1 \cdot x_3 \\ x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot x_2 \\ \bar{x}_o \cdot \bar{x}_1 \cdot x_2 \\ x_o \cdot x_1 \cdot x_3 \end{array} \right|, \quad f_4 = \left| \begin{array}{c} x_o \\ \begin{array}{c|c} x_1 & x_3 \\ x_2 & \bar{x}_1 \end{array} \end{array} \right| \begin{array}{c|c} x_1 & \bar{x}_3 \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{array} \right|, \quad f_5 = \left| \begin{array}{c} A \left| \begin{array}{c|c} \bar{B} & B \\ C & \bar{C} \end{array} \right. \\ A \cdot \bar{B} \cdot C \end{array} \right|$$

Réponses :

$$f_1 = \left| \begin{array}{c} A \\ \\ \bar{B} \cdot \bar{C} \end{array} \right|, \quad f_2 = \left| \begin{array}{c} A \\ \\ C \\ \\ D \end{array} \right|, \quad f_3 = \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \\ x_3 \end{array} \right|$$

$$f_4 = x_o \left| \begin{array}{c|c} x_1 & \bar{x}_3 \\ & \\ \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\ \\ x_o \cdot x_1 \cdot \bar{x}_3 \end{array} \right|, \quad f_5 = A \cdot \left| \begin{array}{c} \bar{B} \\ \\ C \end{array} \right|$$

6° Démontrer que si une fonction canonique, mise sous la forme de fonction carrée biforme, ne contient aucune adjacence relative à la variable mise en facteur partielle, son consensus est identiquement nul dans le cas de la première forme canonique (produel de produits) et son consensus dual est identiquement égal à l'unité dans le cas de la deuxième forme canonique (produit de produels).

7° On donne dans l'ordre alphabétique, les six variables (A, B, C, D, E, F) et le produit des produels correspondant aux combinaisons suivantes : I (4, 5, 7, 12, 13, 15, 20, 21, 23, 28, 29, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 52, 53, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63). Dans l'équivalence binaire des nombres indiqués, on affecte à la variable « A » le poids « 32 » et successivement les poids 16, 8, 4, 2 et 1 aux variables B, C, D, E, F.

Simplifier la fonction « I » par mises en facteur, transpositions et adjacences successives et vérifier le résultat par la méthode de « Karnaugh ».

Réponse :

$$I = \left| \begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{D} \\ & \\ B \cdot \bar{C} & E \cdot \bar{F} \end{array} \right|$$

8° Etablir les tables de vérité réduites relatives aux valeurs « 0 » puis aux valeurs « 1 » de la fonction $f_1 = \left| \begin{array}{c} A \\ \bar{B} \cdot \bar{C} \end{array} \right|$.

Etablir ensuite la table de vérité complète de « f_1 » et les deux formes canoniques correspondantes.

Réponses :

Tables de vérité réduites

A	B	C	f_1
1	ϕ	ϕ	1
ϕ	0	0	1

A	B	C	f_1
0	1	ϕ	0
0	ϕ	1	0

Table de vérité complète

	A	B	C	f_1
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

Première forme canonique

$$f_1 = \left| \begin{array}{c|c} \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} & 0 \\ A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} & 4 \\ A \cdot \bar{B} \cdot C & 5 \\ A \cdot B \cdot \bar{C} & 6 \\ A \cdot B \cdot C & 7 \end{array} \right.$$

Deuxième forme canonique

$$f_1 = \left| \begin{array}{c|c|c} A & A & A \\ B & \bar{B} & \bar{B} \\ \bar{C} & C & \bar{C} \end{array} \right|$$

9° Etablir les tables de vérités réduites relatives à la fonction simplifiée $f_4 = x_o \cdot \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\ x_1 \cdot \bar{x}_3 \end{array} \right|$. En déduire la première forme canonique (produel de produits) en partant directement de la forme donnée de « f_4 ».

Réponses :

On peut écrire :

$$f_4 = \left| \begin{array}{c} x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\ x_o \cdot x_1 \cdot \bar{x}_3 \end{array} \right| = x_o \left| \begin{array}{c|c} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 & x_1 \end{array} \right|$$

Ce qui permet d'établir les deux tables de vérité réduites :

x_o	x_1	x_2	x_3	f_4
1	0	0	ϕ	1
1	1	ϕ	0	1

x_o	x_1	x_2	x_3	f_4
0	ϕ	ϕ	ϕ	0
ϕ	1	ϕ	1	0
ϕ	0	1	ϕ	0

Pour obtenir la première forme canonique il suffit de multiplier le premier produit de « f_4 » par $\left| \begin{array}{c} x_3 \\ \bar{x}_3 \end{array} \right|$ et le second produit par $\left| \begin{array}{c} x_2 \\ \bar{x}_2 \end{array} \right|$.

$$f_4 = \left| \begin{array}{c} x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \\ x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \\ x_o \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \\ x_o \cdot x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \end{array} \right.$$

10° Ecrire la fonction « F » qui correspond à la table de vérité réduite suivante :

A	B	C	D	F
0	ϕ	ϕ	0	0
0	1	ϕ	ϕ	0
1	ϕ	1	ϕ	0
ϕ	1	1	0	0

Puis la simplifier par la méthode des consensus.

Réponse :

$$F = \left|\begin{array}{c|c|c|c} A & A & \overline{A} & \overline{B} \\ & & & \overline{C} \\ D & \overline{B} & \overline{C} & D \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & \overline{C} \\ D \cdot \overline{B} & \overline{A} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} A \cdot \overline{C} \\ \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot D \end{array}\right|$$

11° Simplifier les fonctions suivantes :

$$A = \left|\begin{array}{c} x_o \cdot x_1 \\ x_o \cdot x_2 \\ x_o \cdot x_3 \\ \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \end{array}\right|, \quad B = \left|\begin{array}{c} \overline{x}_o \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \\ \overline{x}_o \cdot x_2 \cdot x_3 \\ x_o \cdot \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \\ x_o \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3 \\ x_o \cdot x_2 \cdot x_3 \end{array}\right|, \quad C = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} x_o & x_1 & x_o & \overline{x}_o & \overline{x}_o \\ x_1 & x_2 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_2 & x_3 & \overline{x}_2 & x_2 & \overline{x}_2 \end{array}\right|$$

Réponses :

$$A = \left|\begin{array}{c} x_o \\ \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \end{array}\right|, \quad B = \left|\begin{array}{c} x_2 \\ x_o \cdot \overline{x}_1 \end{array}\right|, \quad C = x_1$$

CHAPITRE IV

FONCTIONS BINAIRES ET CIRCUITS DE COMMUTATION

Malgré des bases mathématiques rigoureuses, l'analyse binaire ne présenterait aucun intérêt si elle ne constituait un outil utile, simple et adapté à la mise en équation, à l'étude et à la réalisation des circuits de commutation qui sont les constituants fondamentaux des automatismes complexes de plus en plus indispensables à l'organisation d'une société moderne.

Il est donc absolument nécessaire que l'ingénieur en informatique puisse établir immédiatement des liens étroits entre les résultats théoriques et l'ensemble des possibilités technologiques, dans une continuité harmonieuse qui mène de la conception à la réalisation pratique des systèmes.

4.1. — Circuits à relais

Un relais est constitué généralement d'un circuit magnétique sur lequel sont bobinés un ou plusieurs enroulements de commande. Le circuit magnétique comprend une armature mobile supportant des contacts à ouverture ou à fermeture dont l'état ouvert ou fermé dépend de l'excitation. Les circuits de commande et les contacts sont généralement isolés les uns des autres.

La représentation schématique d'un relais se fait en général comme l'indiquent les figures 4.1 et 4.2.

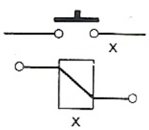


FIG. 4.1. — *Contact travail ou normalement ouvert*

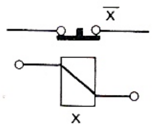


FIG. 4.2. — *Contact repos ou normalement fermé*

En désignant un relais et ses contacts par la même lettre « x », par exemple, on peut établir des correspondances simples avec les expressions binaires.

— Si le relais est au repos (désexcité), $x = 0$. Les contacts « travail » désignés également par « x » sont ouverts. Les contacts « repos » désignés par « $\bar{x}$ » sont fermés ($\bar{x} = 1$).

— Si le relais est excité, $x = 1$. Les contacts « travail » sont alors fermés ($x = 1$). Les contacts « repos » sont ouverts ($\bar{x} = 0$).

Il est ainsi possible de réaliser en pratique un *produit binaire* à l'aide d'une chaîne de contacts, montés en cascade, dans laquelle les variables directes sont des contacts « travail » et les variables complémentées des contacts « repos » des relais correspondants.

On peut également réaliser un « produel » en utilisant des contacts de relais montés en parallèle et en respectant les mêmes correspondances.

— Le produit :

$$U \cdot x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 = y_1$$

peut être représenté par la chaîne de contacts de la figure 4.3.

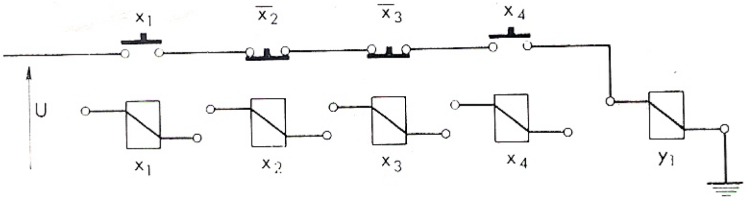


FIG. 4.3.

On peut convenir, dans l'expression binaire, d'affecter à « U » la valeur « 1 » ou « 0 » selon que la tension nécessaire à l'excitation du relais « y_1 » est appliquée ou non.

Pour que le relais « y_1 » soit excité ($y_1 = 1$), il faut que la tension « U » soit appliquée ($U = 1$), que le relais « x_1 » soit excité ($x_1 = 1$), que le relais « x_2 » soit au repos ($\bar{x}_2 = 1$), que le relais « x_3 » soit au repos ($\bar{x}_3 = 1$) et que le relais « x_4 » soit excité ($x_4 = 1$).

Dans tous les autres cas, le relais « y_1 » reste au repos ($y_1 = 0$). Ces conditions montrent bien l'identité de la chaîne réalisée et du produit binaire.

$$U \cdot x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 = y_1$$

— Le « *produel* » : $U \cdot \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right| = y_2$

peut également être représenté en pratique par la chaîne de contacts de la figure 4.4.

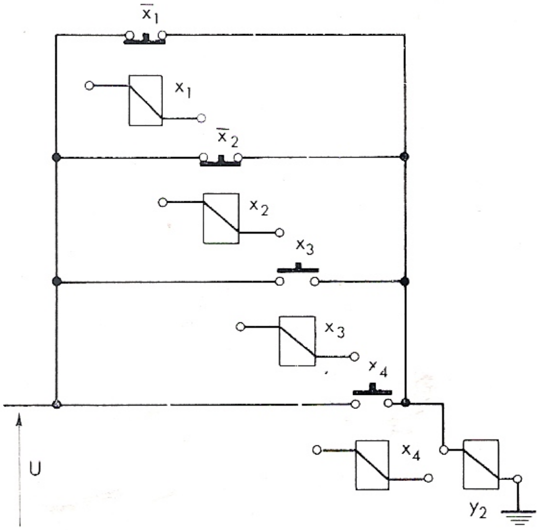


FIG. 4.4.

Les contacts et relais associés étant désignés par une même lettre, il n'est pas toujours nécessaire de représenter ces derniers dans un schéma.

Le schéma de la figure 4.5. correspond à la fonction

$$\left|\begin{array}{l} \bar{a}\cdot b \\ r \left| \begin{array}{c} \bar{a} \\ b \end{array} \right| \end{array}\right| = y$$

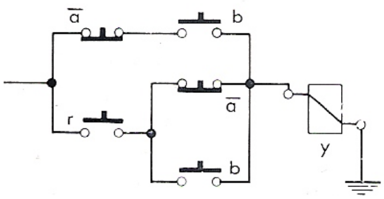


FIG. 4.5.

et nous constatons que le schéma même se confond avec la fonction et devient ainsi superflu. Les fonctions binaires sont donc immédiatement utilisables pour la réalisation de circuits comprenant de simples relais à contacts multiples. Certains circuits particuliers correspondent à des fonctions binaires qu'il est intéressant de déterminer. C'est le cas, par exemple, du relais « r » à deux enroulements inversés, alimentés en courant continu, de la figure 4.6.

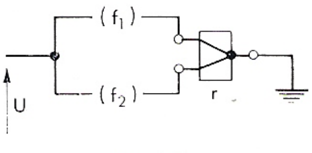


FIG. 4.6.

Lorsque les deux enroulements sont parcourus par des courants de même intensité, le relais reste au repos et il ne peut être excité que si $f_1 = 0$ et $f_2 = 1$ ou $f_1 = 1$ et $f_2 = 0$ avec $U = 1$.

Le circuit est donc équivalent à la fonction :

$$r = \mathrm{U} \cdot \begin{vmatrix} f_1 \cdot \bar{f}_2 \\ \\ f_2 \cdot \bar{f}_1 \end{vmatrix} = \mathrm{U} \cdot \begin{vmatrix} f_1 & \bar{f}_2 \\ \\ f_2 & \bar{f}_1 \end{vmatrix}$$

— Lorsque la chaîne d'excitation d'un relais « y » est un produit « $f_1 \cdot f_2$ », il est possible de réaliser l'un des schémas équivalents de la figure 4.7.

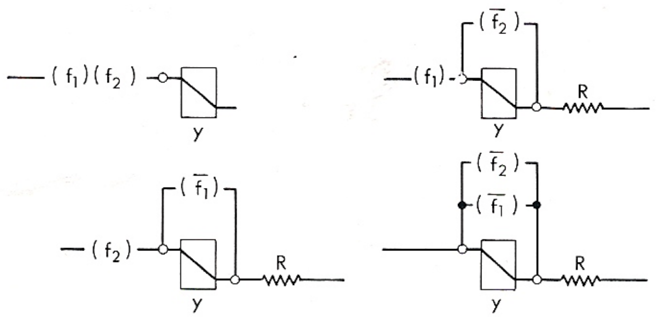


FIG. 4.7.

Les résistances « R » évitent simplement que la source d'alimentation se trouve en court-circuit lorsque les fonctions $\bar{f}_1$ ou $\bar{f}_2$ montées en parallèle avec le relais, sont égales à l'unité.

4.2. — Circuits utilisant des semi-conducteurs

Les progrès et les perfectionnements apportés à la fabrication des semi-conducteurs, l'amélioration en particulier de la fiabilité des circuits, ont ouvert à l'automatisme d'immenses perspectives.

Avec l'utilisation des semi-conducteurs, l'analyse binaire trouve ses applications les plus fécondes.

Les diodes sont utilisées surtout pour des transcodages faisant intervenir des « produits » (fonction ET) ou des « produels » (fonctions OU) à condition, toutefois, de disposer des tensions qui correspondent aux variables directes et complémentées nécessaires à la constitution de ces fonctions.

Nous avons vu qu'il était possible d'associer une variable binaire à une tension en convenant d'affecter la valeur « 0 » ou « 1 » à cette variable selon que la tension est absente ou présente au point considéré.

Il est ainsi possible, à l'aide de diodes, de réaliser par exemple la fonction « OU » et la fonction « ET » (fig. 4.8 et 4.9).

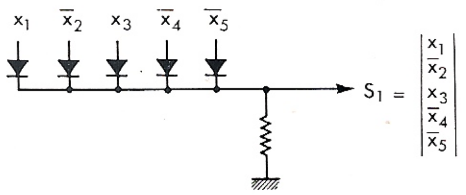


FIG. 4.8. — « *Produel* » *ou fonction* « *OU* » *à diodes*

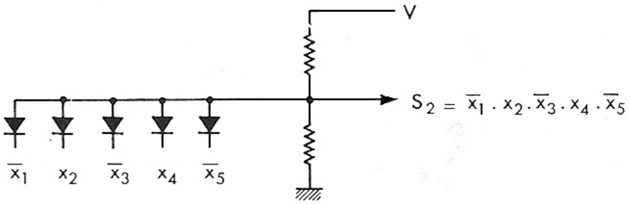


FIG. 4.9. — « *Produit* » *ou fonction* « *ET* » *à diodes*

Si nous nous référons aux caractéristiques d'un transistor, du type NPN par exemple (fig. 4.10), nous voyons que la polarité de la tension de sortie est inverse de celle de la tension d'entrée. Nous pouvons, d'autre part, obtenir un gain de puissance en utilisant l'amplification du transistor. Ces deux particularités permettent donc de complémenter une fonction binaire et de régénérer son signal en sortie.

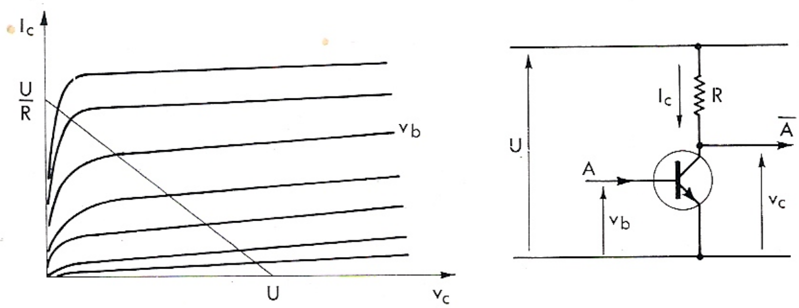


FIG. 4.10.

Nous pourrons, ainsi, à l'aide de diodes et de transistors, réaliser des fonctions « OU », des fonctions « ET », ainsi que leurs compléments avec régénération de puissance comme le montre le schéma de la figure 4.11.

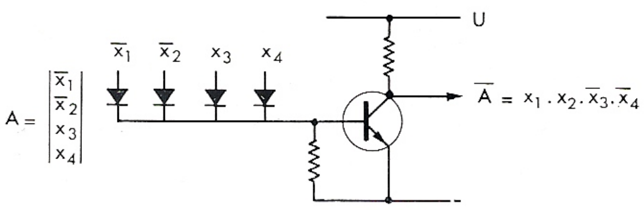


FIG. 4.11.

Il est également aisé de déterminer directement la fonction binaire associée à un montage électronique, comme le montre l'exemple suivant (fig. 4.12).

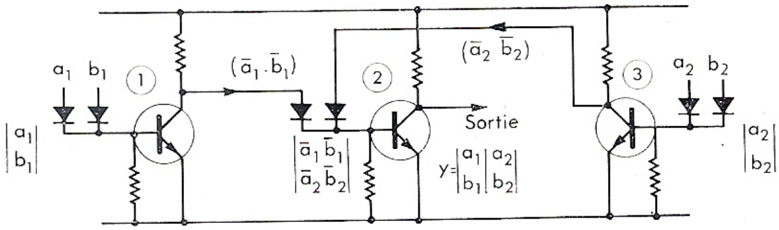


FIG. 4.12.

A l'entrée du transistor n° 1 est appliquée la fonction $\left| \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \end{array} \right|$ et nous obtenons, en sortie, le complément $\bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1$. A la sortie du transistor n° 3 est réalisée la fonction $\bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2 = \left| \begin{array}{c} a_2 \\ b_2 \end{array} \right|$. A l'entrée du transistor n° 2 se trouve donc appliquée la fonction $\left| \begin{array}{c} \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 \\ \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2 \end{array} \right| = \bar{y}$. Ce qui permet, en définitive, d'écrire à la sortie du transistor n° 2, la fonction $y = \left| \begin{array}{c|c} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array} \right|$.

En conclusion, nous constatons que toute fonction binaire est réalisable en pratique à l'aide de relais ou à l'aide d'éléments semi-conducteurs. Dans ce dernier cas, cependant, il est nécessaire d'exprimer la fonction sous forme d'un *produit de produels* ou d'un *produel de produits*.

4.3. — *Circuits logiques intégrés*

Le nombre considérable d'éléments exigés par la réalisation d'ensembles complexes, tels que les calculateurs électroniques, ne peut se concevoir et s'admettre que si chacun des éléments possède un temps moyen de bon fonctionnement élevé sous un volume aussi réduit que possible.

Du tube électronique au transistor, un pas très important a été franchi dans cette voie et les circuits intégrés marquent une nouvelle étape vers la réduction de l'encombrement.

L'évolution des circuits électroniques logiques s'est faite et continue à se faire en fonction de critères d'amélioration précis qui peuvent s'énumérer ainsi :

— Réduction de l'encombrement.
— Réduction de la consommation.

— Réduction de la sensibilité aux parasites.
— Augmentation de la rapidité.
— Augmentation de la fiabilité.

Ces améliorations ne sont pas toujours compatibles entre elles et font, en pratique, l'objet de compromis qui dépendent du but recherché dans l'utilisation d'un circuit donné.

L'étude de la réduction des dimensions et de la recherche d'un fonctionnement plus rapide ont amené les constructeurs à envisager d'étendre aux ensembles logiques des techniques de fabrication appropriées comme celle appliquée aux transistors « *Planar* ».

Malgré les difficultés présentées par les micromanipulations, la tentative a été couronnée de succès. Les premières difficultés passées, la fiabilité et le prix des circuits intégrés n'ont fait que s'améliorer.

Dans la technique « *Planar* », que nous décrirons sommairement à titre d'exemple, les circuits intégrés sont réalisés à partir d'une plaquette de silicium de type « N » très pur, recouverte d'une couche protectrice de silice (SiO_2). La formation d'un cache par photogravure préserve une partie de la couche de silice de l'attaque chimique (~~fluorure d'ammonium~~ acide fluorhydrique) qui, par dissolution, met à nu le silicium aux endroits restés sans protection et qui ont été préalablement choisis pour être traités par diffusion à haute température d'une impureté de type « P » (Bore) ou de type « N » (Phosphore).

Le silicium de type « P » constitue la base des transistors et l'anode des diodes.

Les émetteurs sont réalisés ensuite par diffusion d'une impureté de type « N ». Enfin, les résistances sont obtenues à l'aide de transistors bloqués.

Les circuits intégrés sont généralement réalisés sur des parallélépipèdes de silicium de 500 à 600 μ de côté et de 150 à 200 μ d'épaisseur environ.

Les connexions extérieures sont reliées aux circuits par des fils d'or de quelques dizaines de microns de diamètre soudés par thermocompression sur les points à connecter qui ont été préalablement métallisés à l'aide d'un dépôt d'aluminium.

La métallisation à l'aluminium permet également d'intégrer des condensateurs en utilisant la silice comme diélectrique; mais il est difficile d'augmenter beaucoup la surface des armatures et, par conséquent, *d'obtenir des capacités supérieures à quelques centaines de picofarads.*

Notons, en conclusion, que l'intégration permet une réduction considérable de l'encombrement des circuits. Pour un même montage, le gain de volume, hors tout, est de l'ordre de 600.

4.4. — ***Classification des circuits logiques***

Différents systèmes logiques ont été élaborés pour répondre aux conditions citées, tout en essayant d'obtenir un coût acceptable.

Nous allons passer en revue les principaux systèmes rencontrés en pratique.

4.41. — Système à résistance et transistors (R.T.L.). — (R.T.L., *Resistors Transistors Logic)*, ce système n'est plus guère utilisé. Les transistors y jouent uniquement un rôle de régénération des signaux et de complémentation. La fonction « OU », à l'entrée, est obtenue à l'aide de résistances montées en parallèle (fig. 4.13).

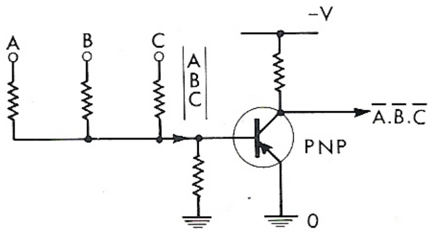


FIG. 4.13.

Dans l'exemple cité, les fonctions logiques indiquées sont valables en « logique négative », c'est-à-dire; si l'on affecte la valeur logique « 1 » aux tensions négatives par rapport à la masse électrique, laquelle constitue le zéro logique de référence.

Les inconvénients de ce système sont nombreux du fait des interactions électriques entre les différentes entrées qui limitent le facteur pyramidal d'entrée *(entrance* ou *fan-in)* et de l'absence de seuils élevés qui se traduit par une sensibilité aux parasites plus importante. Il présente, par contre, l'avantage d'être peu onéreux.

Circuits intégrés à résistances et transistors. — Il existe actuellement des circuits intégrés dénommés R.T.L., qui diffèrent très sensiblement des circuits précédents bien que portant le même nom.

Il s'agit de montages qui utilisent effectivement des transistors et des résistances, mais à chaque transistor n'est associée qu'une résistance de base et les collecteurs sont réunis à une même résistance de charge comme l'indique la figure 4.14.

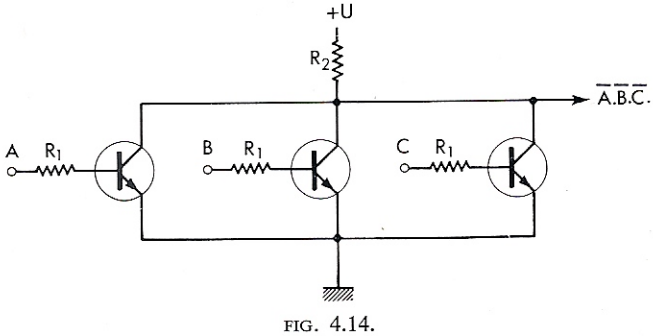


FIG. 4.14.

Ce type de circuit a l'avantage d'être simple.
Il est assez facile à réaliser en circuit intégré.

4.42. — Systèmes à diodes et transistors (D.T.L.). — (D.T.L. *Diodes Transistors Logic)*. C'est à ce système (fig. 4.15) que se rattachent les exemples du paragraphe 4.2 précédent.

La présence des diodes isole les différentes entrées les unes des autres et le facteur pyramidal d'entrée (*entrance* ou *fan-in*) peut être important.

Les seuils fixés par les diodes améliorent l'immunité aux parasites; les faibles résistances directes et les faibles capacités en font un circuit rapide. C'est, par contre, un système dont le prix est plus élevé.

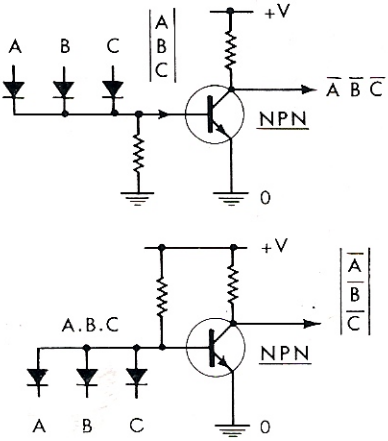


FIG. 4.15.

4.43. — ***Système à transistors à couplage direct (D.C.T.L.).*** — Comme la désignation l'indique, (D.C.T.L., *Direct Coupled Transistors Logic*) ce système utilise des transistors à liaisons directes collecteurs-bases (fig. 4.16).

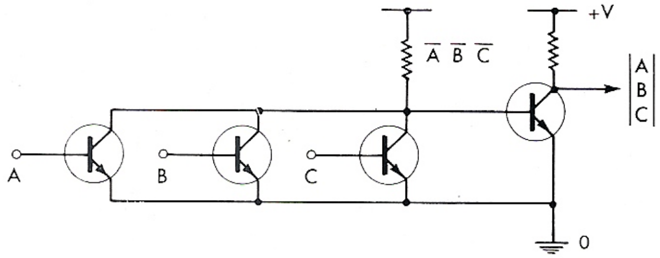


FIG. 4.16.

Il est intéressant, par sa simplicité, car il se limite aux deux éléments de base que constituent le transistor et sa résistance de charge de collecteur.

La fabrication en est facilitée mais la saturation des transistors augmente la consommation et réduit la rapidité.

4.44. — ***Système à transistors à émetteurs couplés (E.C.T.L.).*** — (E.C.T.L. *Emitters Coupled Transistors Logic*). — Il se rattache au système D.C.T.L. précédent, mais la résistance commune d'émetteur évite la saturation des transistors, accroît la rapidité de fonctionnement et permet d'ajuster les seuils. L'écart entre les niveaux logiques « 0 » et « 1 » est, par contre, de l'ordre de grandeur de la tension de seuil émetteur-base d'un transistor; soit 0,7 volt, pour les transistors au silicium. Ce faible écart rend le circuit très sensible aux parasites (fig. 4.17).

Généralement, les niveaux sont respectivement de 0,8 volt pour le « 0 » logique et de 1,5 volt pour le « 1 » logique.

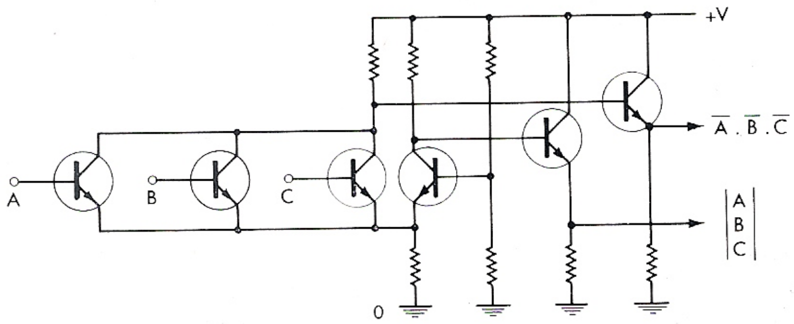


FIG. 4.17

Les circuits « E.C.T.L. » sont les seuls qui allient, à l'avantage de la rapidité, celui de la compensation, c'est-à-dire que la consommation reste pratiquement indépendante de l'état logique du circuit. Cette particularité est très intéressante lorsque l'on considère les faibles impédances mises en jeu dans les circuits à transistors relativement à celles des alimentations. La compensation affaiblit les niveaux des impulsions transitoires de courant et réduit considérablement les couplages parasites et les possibilités d'interaction des circuits par l'intermédiaire de la source. L'intérêt en est d'autant plus grand que les circuits alimentés par une même source sont plus nombreux, ce qui est souvent et de plus en plus le cas.

4.45. — ***Système à transistors multiples (T.T.L.).*** — (T.T.L. *Transistor-Transistor Logic*). — Le transistor d'entrée à émetteur multiple possède un faible temps de recouvrement qui réduit les temps de propagation. Grâce au montage en cascade prévu en sortie, les impédances sont faibles et le facteur pyramidal de sortie (*sortance* ou *fan-out*) est important.

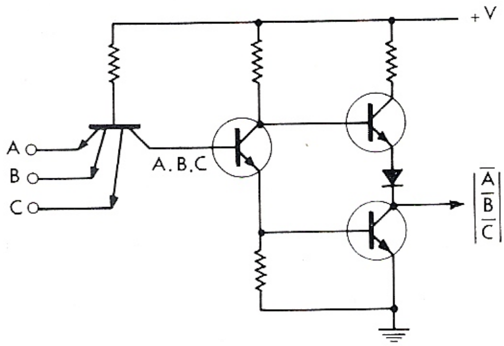


FIG. 4.18

Le circuit réalisé (fig. 4.18) est assez rapide et présente une bonne immunité aux parasites. Il est, par contre, peu compensé et sa consommation est importante. Une bonne fiabilité globale en fait cependant un circuit intéressant et recherché.

4.46. — ***Circuits intégrés à transistors M.O.S.*** — Les transistors à jonction peuvent être fondamentalement considérés comme des amplificateurs de courants. Le courant base contrôle, en effet, le courant collecteur, et tous deux restent pratiquement proportionnels, tant que leurs valeurs se maintiennent dans la région où les caractéristiques peuvent être regardées comme linéaires.

L'inconvénient majeur d'un amplificateur de courant est d'imposer des tensions faibles lorsque l'on désire réduire la consommation. Ce qui conduit à mettre en œuvre dans les circuits, par voie de conséquence, des résistances de faible valeur ohmique. Il en résulte alors une sensibilité au bruit élevée qui se traduit par des rapports « signal sur bruit » défectueux. Il est donc normal que les fabricants de semi-conducteurs aient cherché dès l'origine à réaliser des transistors fonctionnant un peu comme des tubes électroniques triodes ou pentodes dans lesquels le courant grille est très faible sinon négligeable, l'idéal étant la recherche d'un système équivalent à un amplificateur de tension, mettant en œuvre des courants réduits et permettant des consommations très faibles, tout en assurant une bonne fiabilité des circuits. C'est ainsi qu'ont été imaginés et réalisés les transistors M.O.S., (Insulated gate field-effect *metal-oxide-silicon* transistor) transistor « metal-oxyde-silicium » à effet de champ et à grille isolée.

Il existe de nombreux types de transistors M.O.S., et sans entrer dans le détail, disons que les différents types peuvent toujours être représentés par les schémas de la figure 4.19.

Un transistor M.O.S. comprend trois électrodes : une grille (*gate*), une électrode drain (*drain*) et une électrode source (*source*).

La tension grille contrôle le courant drain, de même que dans une triode, la tension grille contrôle le courant plaque.

En ce qui concerne les circuits numériques, il est intéressant de préciser les schémas qui correspondent respectivement à un inverseur (fig. 4.20) et à un circuit « Ni » comprenant trois entrées x_1, x_2, x_3 (fig. 4.21).

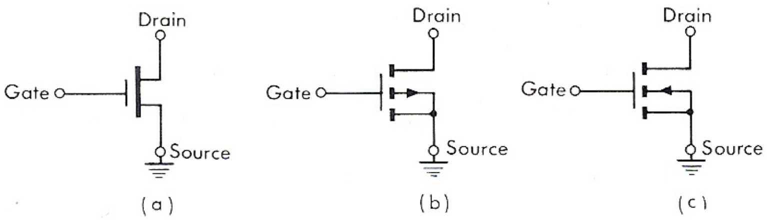


FIG. 4.19

a) Représentation commune

b) Transistor canal M.O.S. type « p »

c) Transistor canal M.O.S. «type n »

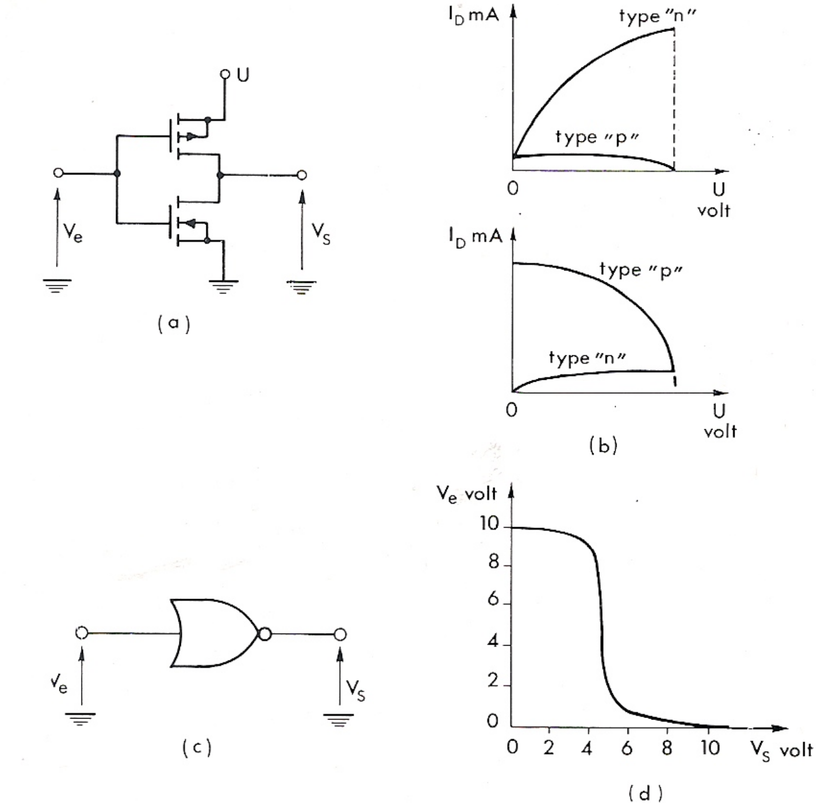


FIG. 4.20

a) Circuit inverseur M.O.S. de base

d) Caractéristique de transfert de l'inverseur M.O.S.

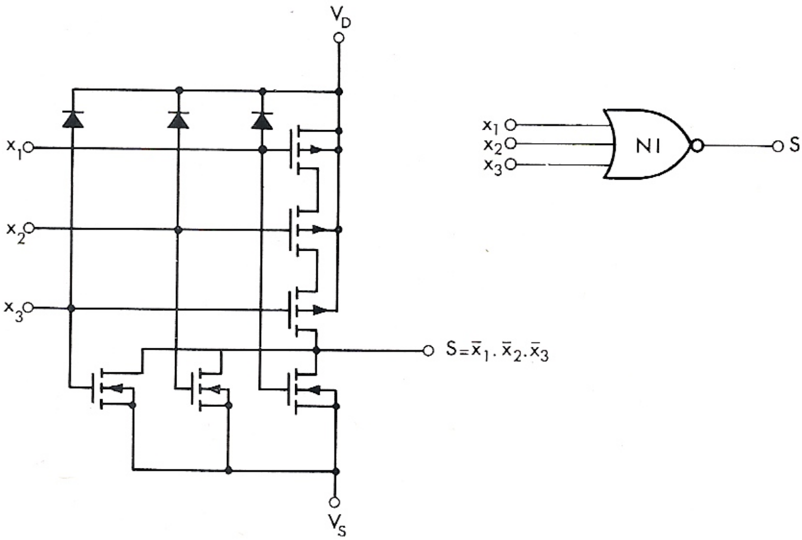


FIG. 4.21. — *Circuit intégré « NI » à trois entrées en technologie M.O.S.*

Les circuits intégrés à transistors M.O.S. ont l'avantage de ne pas présenter de grandes difficultés d'intégration. Ils mettent en œuvre des tensions (plusieurs dizaines de volts) et des résistances élevées. Les seuils de commutation sont également élevés, assurant une bonne immunité au bruit et une bonne fiabilité.

La consommation est faible et le seul désavantage reste, pour l'instant, la lenteur relative des réponses transitoires comparées à celles des transistors bipolaires réalisées actuellement.

4.5. — Symboles et schémas logiques

Les multiples possibilités de réalisation technologiques des fonctions binaires, sous forme de circuits électroniques, nous orientent vers la recherche d'un symbolisme simple destiné à la représentation générale des schémas logiques mais étroitement lié aux expressions mathématiques.

Nous avons adopté des symboles (*) qui sont d'exécution facile, mais on peut en utiliser d'autres aussi commodes et aussi bien définis.

— La fonction « ET » (produit) sera représentée par un demi-rectangle complété par un demi-cercle. Le côté du rectangle opposé au demi-cercle correspond à l'entrée des variables. La fonction est représentée, en sortie, du côté du demi-cercle (fig. 4.22).

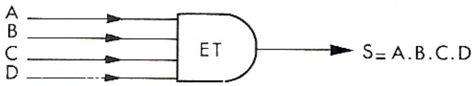


FIG. 4.22

— La fonction « OU » (produel) sera représentée par un triangle dont les côtés sont des arcs de cercles. Le sommet intersection des deux côtés convexes est orienté vers la sortie, et la base correspond à un côté concave, sur lequel arrivent les entrées (fig. 4.23).

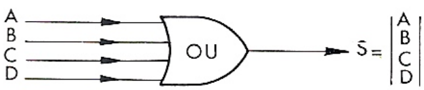


FIG. 4.23

— Un cercle de faible rayon, tracé au niveau d'une entrée ou à la sortie, indique que la variable ou la fonction qui lui correspond est complémentée (fig. 4.24 et 4.25).

(*) Ces symboles ont été choisis parce qu'ils sont les plus couramment utilisés et correspondent aux normes militaires MIL-STD 806, et aux normes ASA.

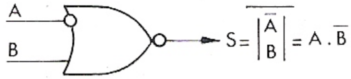


FIG. 4.24

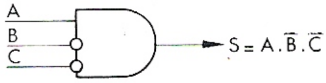


FIG. 4.25

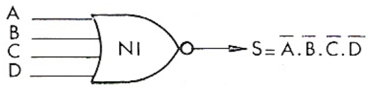


FIG. 4.26

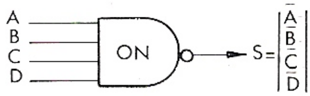


FIG. 4.27

Les deux derniers circuits « NI » et « ON » (fig. 4.26 et 4.27) sont désignés respectivement en anglais sous les noms de circuit « NOR » et circuit « NAND ».

Un circuit correspondant à une fonction binaire est susceptible d'être représenté schématiquement de plusieurs manières différentes. A titre d'exemple le circuit « OU » exclusif $y = \begin{vmatrix} a \cdot \bar{b} \\ b \cdot \bar{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \bar{b} \\ b & \bar{a} \end{vmatrix}$, peut être représenté à l'aide de l'un des quatre schémas de la figure 4.28 selon la technologie utilisée.

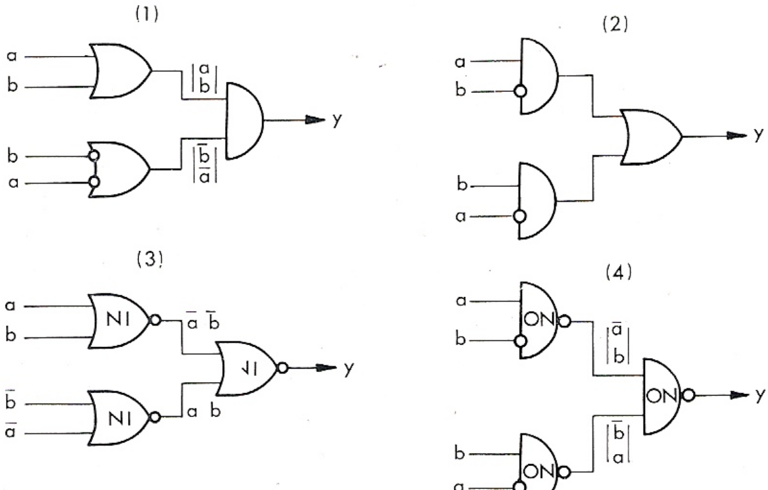


FIG. 4.28

Les formes (3) et (4) sont les plus courantes. Les transistors permettent, en effet, de régénérer le signal en le complémentant. Les différents circuits logiques utilisant diodes et transistors mènent donc souvent à des éléments qui correspondent, soit au complément d'un produel (circuit « NI »), soit au complément d'un produit (circuit « ON »).

On peut établir un certain nombre de règles élémentaires de base quant à la forme à donner aux fonctions binaires suivant la technologie imposée ou choisie.

Lorsqu'on dispose des variables et de leurs compléments, il est toujours possible d'établir un schéma logique en deux couches, ce qui réduit le temps d'action des circuits à deux fois seulement le temps de propagation d'un élément.

Dans le cas où l'on utilise des circuits « NI », il suffit de mettre la fonction binaire sous forme d'un produit de produels pour limiter le montage à deux couches.

— Exemple (fig. 4.29) :

$$y = \left| \begin{array}{c|c|c} \bar{a} & \bar{a} & b \\ b & c & c \end{array} \right|$$

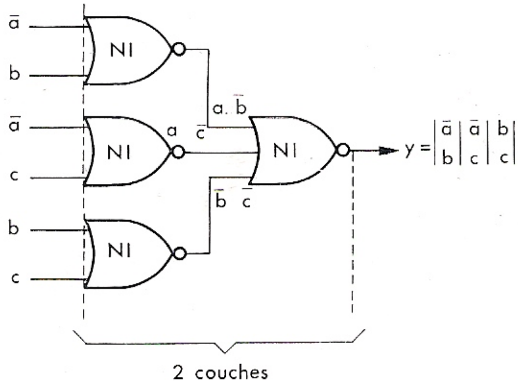


FIG. 4.29

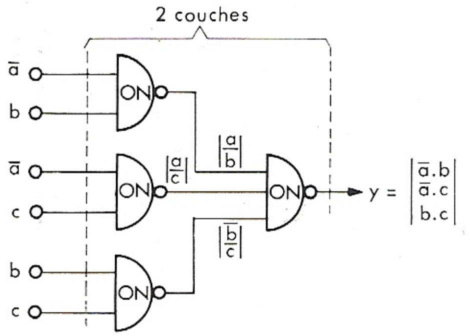


FIG. 4.30

Dans le cas où l'on utilise des circuits « ON », il suffit de mettre la fonction binaire sous forme d'un produel de produits pour limiter également le montage à deux couches.

— Exemple (fig. 4.30) :

$$y = \left| \begin{array}{c|c|c} \bar{a} & \bar{a} & b \\ b & c & c \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \bar{a} \cdot b \\ \bar{a} \cdot c \\ b \cdot c \end{array} \right|$$

Lorsqu'on ne dispose pas des variables complémentées, il faut utiliser un circuit « NI » ou un circuit « ON » supplémentaire pour chaque complémentation et la réalisation partique ne peut se limiter, généralement, à moins de trois couches. En ce qui concerne les deux exemples précédents, il faudrait alors réaliser les montages des figures 4.31 et 4.32.

D'une façon générale, il faut essayer, *lorsqu'on utilise des circuits* « NI », *de mettre les variables directes en facteur dual et les variables complémentées en facteur direct.*

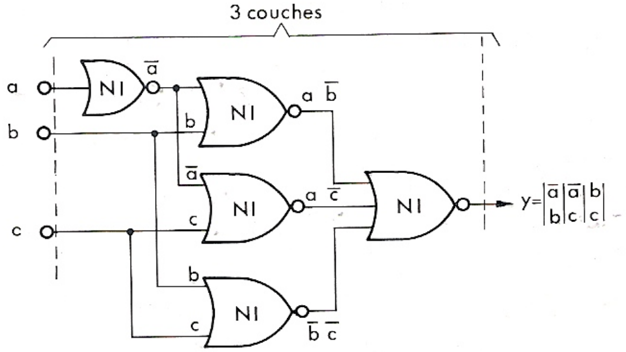


FIG. 4.31

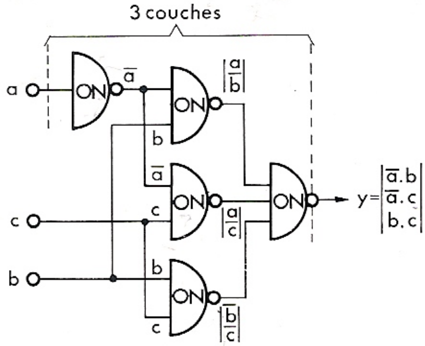


FIG. 4.32

— Exemple : voir page

$$y = \left|\begin{array}{c} x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \\ \\ x_1 \cdot \bar{x}_o \cdot \bar{x}_2 \end{array}\right|$$

il est intéressant de mettre la fonction « y » sous la forme :

$$y = \left|\begin{array}{c|c} x_o & \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \\ \\ x_1 & \bar{x}_o \cdot \bar{x}_2 \end{array}\right|$$

Cette forme conduit au schéma simple de la figure 4.33.

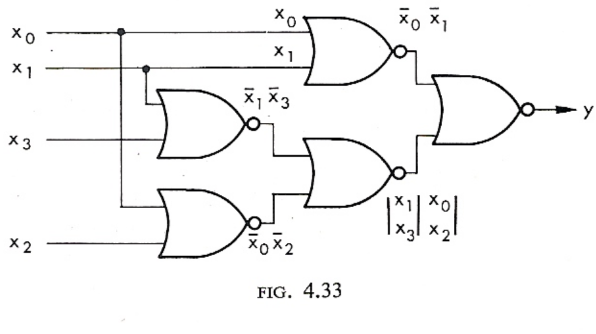


FIG. 4.33

Dans le cas où l'on utilise des circuits *du type « ON »*, *il faut essayer de mettre en facteur direct les variables directes et en facteur dual les variables complémentées.*

— Exemple :

$$y = \left| \begin{array}{c} x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \\ \\ x_1 \cdot \bar{x}_o \cdot \bar{x}_2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} x_o & \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 \\ \bar{x}_o \end{array} \right. \\ \\ x_1 & \left| \begin{array}{c} \bar{x}_o \cdot \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{array} \right. \end{array} \right|$$

$$y = \left| \begin{array}{ccc} x_o & \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_o \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \bar{x}_3 \\ \bar{x}_o \end{array} \right. \\ \\ x_1 & \left| \begin{array}{c} \bar{x}_o \\ \bar{x}_1 \end{array} \right. & \left| \begin{array}{c} \bar{x}_2 \\ \bar{x}_1 \end{array} \right. \end{array} \right|$$

Cette dernière expression permet de réaliser le montage de la figure 4.34.

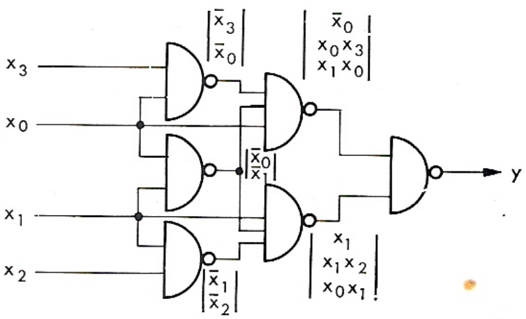


FIG. 4.34

La recherche des expressions binaires optimales en fonction du type de circuit utilisé peut faire l'objet d'une étude très approfondie reposant sur les bases élémentaires que l'on vient de passer rapidement en revue. Compte tenu, cependant, de l'évolution des circuits intégrés, il est à prévoir que les circuits logiques se présenteront dans un proche avenir *sous forme symétrique et compensée*, c'est-à-dire que chaque circuit élémentaire nécessitera sur chaque entrée une double connexion correspondant aux deux formes directe et complémentée des variables et fournira également en sortie les deux formes directe et complémentée de la fonction.

La symétrie permettra avec facilité, de compenser les circuits qui conserveront ainsi une consommation constante quel que soit leur état. Ces dispositions sont intéressantes parce qu'elles augmentent la fiabilité de façon notable en réduisant les interactions et la sensibilité aux parasites par la possibilité d'effectuer des liaisons bifilaires ou coaxiales entre circuits.

*4.6. — **Fonctions « majorité »***

L'exemple général que nous allons traiter a pour but de montrer surtout la marche à suivre dans l'étude d'un problème particulier.

Etant données « n » variables binaires distinctes et « p » un nombre entier inférieur ou égal à « n », on appelle *fonction « majorité »*, une fonction binaire des « n » variables qui prend la même valeur logique (0 ou 1) lorsque le nombre des variables qui prennent simultanément la même valeur (0 ou 1) fixée à l'avance, est supérieur ou égal à « p ».

Nous désignerons par « M_n^p » la fonction « majorité » de « n » variables binaires qui prend la valeur « 1 » lorsque le nombre de variables qui prennent la valeur « 1 » est supérieur ou égal à « p » ($p \leqslant n$).

Nous désignerons par « $M_{\bar{n}}^p$ » la fonction « majorité » de « n » variables qui prend la valeur « 1 » lorsque le nombre des variables qui prennent la valeur « 0 » est supérieur ou égal à « p ».

Nous en déduisons que $\bar{M}_n^p$ est une fonction « majorité » qui prend la valeur « 0 » lorsque le nombre des variables qui prennent la valeur « 1 » est supérieur ou égal à « p » et que $\bar{M}_{\bar{n}}^p$ est une fonction majorité qui prend la valeur « 0 » lorsque le nombre des variables qui prennent la valeur « 0 » est supérieur ou égal à « p ».

On passe de la fonction M_n^p à $M_{\bar{n}}^p$ en remplaçant toutes les variables littérales par leurs compléments.

Il suffit donc d'étudier la fonction M_n^p et d'étendre les résultats obtenus aux autres formes $M_{\bar{n}}^p$, $\bar{M}_n^p$ et $\bar{M}_{\bar{n}}^p$.

Compte tenu des définitions précédentes, nous pouvons écrire immédiatement la fonction majorité « M_n^p » sous la forme d'un produel de tous les produits distincts de « p » variables directes prises parmi les « n » variables, ou sous la forme d'un produit de tous les produels distincts de « $n - p + 1$ » variables directes prises parmi les « n » variables.

Le nombre des produits est dans le premier cas, égal à

$$C_n^p = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,\dots\,(n-p+1)}{p\,!}$$

Cas particuliers :

$$\left|\begin{array}{l} M_n^n = x_1 \cdot x_2 \,\dots\, x_n \\ M_n^o = 1 \end{array}\right.$$

4.61. — ***Décomposition des fonctions « majorité ».*** — Si nous mettons l'une des variables, « x_i » par exemple, en facteur partiel dans la fonction « majorité » M_n^p, nous obtenons l'égalité :

$$M_n^p = \left|\begin{array}{c} x_i \cdot M_{n-1}^{p-1} \\ \\ M_{n-1}^p \end{array}\right|$$

Les fonctions « majorité » M_{n-1}^p et M_{n-1}^{p-1} ne contiennent pas la variable « x_i » mais tous les produits en facteur dual dans M_{n-1}^{p-1} se retrouvent en facteur direct dans les produits du produel M_{n-1}^p.

Nous en déduisons que le produit de M_n^p par $\overline{M}_{n-1}^{p-1}$ est nul.

$$M_{n-1}^p \cdot \overline{M}_{n-1}^{p-1} \equiv 0$$

En utilisant la relation $\left|\begin{array}{c} \varphi \\ \\ A \end{array}\right| \equiv \left|\begin{array}{c} \varphi \\ \\ A\bar{\varphi} \end{array}\right|$, nous écrivons :

$$M_n^p = \left|\begin{array}{c} x_i \cdot M_{n-1}^{p-1} \\ \\ M_{n-1}^p \left|\begin{array}{c} \bar{x}_i \\ \\ \overline{M}_{n-1}^{p-1} \end{array}\right. \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} x_i \cdot M_{n-1}^{p-1} \\ \\ M_{n-1}^p \cdot \bar{x}_i \\ \\ M_{n-1}^p \cdot \overline{M}_{n-1}^{p-1} \end{array}\right|$$

et M_n^p peut également s'exprimer par la fonction carrée biforme :

$$M_n^p = \left|\begin{array}{c} x_i \cdot M_{n-1}^{p-1} \\ \\ M_{n-1}^p \cdot \bar{x}_i \end{array}\right|$$

Si nous effectuons, par exemple, la mise en facteur partielle de la variable « x_1 » dans la fonction « M_n^p » puis la mise en facteur partielle de « x_2 » dans les deux fonctions résiduelles « M_{n-1}^p » et « M_{n-1}^{p-1} » nous obtenons :

$$M_n^p = \left|\begin{array}{c} x_1 \cdot M_{n-1}^{p-1} \\ \\ M_{n-1}^p \end{array}\right|, \quad M_{n-1}^p = \left|\begin{array}{c} x_2 \cdot M_{n-2}^{p-1} \\ \\ M_{n-2}^p \end{array}\right|, \quad M_{n-1}^{p-1} = \left|\begin{array}{c} x_2 \cdot M_{n-2}^{p-2} \\ \\ M_{n-2}^{p-1} \end{array}\right|$$

soit :

$$M_n^p = \left|\begin{array}{c} x_1 \cdot x_2 \cdot M_{n-2}^{p-2} \\ \\ \left.\begin{array}{c} x_1 \\ \\ x_2 \end{array}\right| - \cdot M_{n-2}^{p-1} \\ \\ 1 \cdot M_{n-2}^p \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} M_2^2 \cdot M_{n-2}^{p-2} \\ \\ M_2^1 \cdot M_{n-2}^{p-1} \\ \\ M_2^0 \cdot M_{n-2}^p \end{array}\right|$$

Dans cette dernière expression les symboles M_2^k représentent les fonctions « majorité » des deux variables « x_1 » et « x_2 » et les symboles $M_{n-2}^{k'}$, les fonctions « majorité » des « $n - 2$ » variables $x_3, x_4, ..., x_n$.

La décomposition de la fonction M_n^p peut être poursuivie par récurrence jusqu'aux termes de la forme « M_h^h » et « M_l^o » mais nous obtiendrons, dans ce cas les C_n^p produits « M_p^p » relatifs aux combinaisons des « n » variables prises « p » à « p ». Il est, par contre intéressant, si les temps de fonctionnement n'exigent pas la réalisation du circuit en deux couches, de séparer l'ensemble des « n » variables en deux sous-ensembles; l'un contenant par exemple les « p » variables $x_1, x_2, ..., x_p$, auxquelles nous ferons correspondre les fonctions « M_p^k » et l'autre contenant les « $n - p$ » variables $x_{p+1}, x_{p+2}, ..., x_n$ auxquelles nous ferons correspondre les fonctions « $M_{n-p}^{k'}$ ».

La fonction majorité « M_n^p » peut alors s'écrire :

Dans le cas où $p \leqslant \frac{n}{2}$:

$$M_n^p = \left| \begin{array}{l} M_p^p \cdot M_{n-p}^o \\ M_p^{p-1} \cdot M_{n-p}^1 \\ M_p^{p-2} \cdot M_{n-p}^2 \\ \text{- - - - - - - - - -} \\ M_p^o \cdot M_{n-p}^p \end{array} \right|$$

Dans le cas où $\frac{n}{2} < p < n$:

$$M_n^p = \left| \begin{array}{l} M_p^p \cdot M_{n-p}^o \\ M_p^{p-1} \cdot M_{n-p}^1 \\ M_p^{p-2} \cdot M_{n-p}^2 \\ \text{- - - - - - - - - - -} \\ M_p^{2p-n} \cdot M_{n-p}^{n-p} \end{array} \right|$$

Dans les deux cas, le nombre des fonctions « majorité » qui apparaissent dans le produel « M_n^p » est inférieur à « n » et le nombre final des éléments du schéma, inférieur à « C_n^p ». Le nombre des couches est supérieur à deux et le temps de réponse est, en conséquence, plus long.

La figure 4.35 représente le schéma partiel de réalisation dans le cas où $p \leqslant \frac{n}{2}$ et où les éléments du montage sont des circuits « ON ».

La figure 4.36 fournit le schéma partiel dans le cas où $\frac{n}{2} < p < n$, les éléments du montage étant des circuits « NI ».

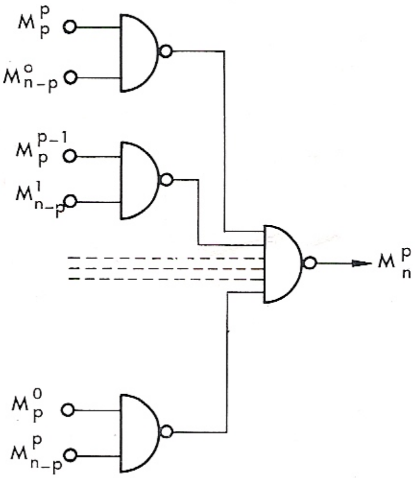


FIG. 4.35

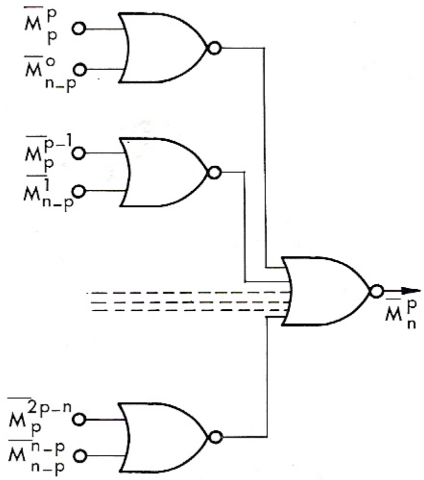


FIG. 4.36

*4.62. — **Exemples de fonctions « majorité ».***

$$M_3^1(a, b, c) = \left| \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \right| \qquad M_3^2(a, b, c) = \left| \begin{array}{c} a \cdot b \\ b \cdot c \\ c \cdot a \end{array} \right| \qquad M_3^3(a, b, c) = a \cdot b \cdot c$$

$$M_4^2(a, b, c, d) = \left| \begin{array}{l} M_2^2(a, b) \cdot M_2^o \\ M_2^1(a, b) \cdot M_2^1(c, d) \\ M_2^o \cdot M_2^2(c, d) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} a \cdot b \cdot 1 \\ \begin{array}{c|c} a & c \\ b & d \end{array} \\ 1 \cdot c \cdot d \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} a \cdot b \\ a \cdot c \\ a \cdot d \\ b \cdot c \\ b \cdot d \\ c \cdot d \end{array} \right|$$

$$
M_5^3 = \left| \begin{array}{c} M_3^3\ (x_1x_2x_3)\cdot M_2^o\ (x_4x_5) \\ \\ M_3^2\ (x_1x_2x_3)\cdot M_2^1\ (x_4x_5) \\ \\ M_3^1\ (x_1x_2x_3)\cdot M_2^2\ (x_4x_5) \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_1\cdot x_2\cdot x_3 \\ \\ \begin{array}{c|c} x_1\cdot x_2 & \\ & x_4 \\ x_2\cdot x_3 & \\ & x_5 \\ x_3\cdot x_1 & \end{array} \\ \\ \begin{array}{c|c} x_1 & \\ x_2 & x_4\ x_5 \\ x_3 & \end{array} \end{array} \right|
$$

4.7. — *Exercices d'application relatifs au chapitre IV*

1° *a*) En effectuant les produels et en tenant compte de la relation

$$
\left| \begin{array}{c} A \\ \\ \varphi \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} A\ \overline{\varphi} \\ \\ \varphi \end{array} \right| ,
$$

démontrer l'égalité :

$$
y = \left| \begin{array}{c} x_1\cdot \overline{x}_2 \\ x_2\cdot \overline{x}_3 \\ x_3\cdot \overline{x}_4 \\ \cdots \\ \\ \cdots \\ x_{n-2}\cdot \overline{x}_{n-1} \\ x_{n-1}\cdot \overline{x}_n \\ x_n\cdot \overline{x}_1 \end{array} \right| \approx \left| \begin{array}{c|c} x_1 & \overline{x}_2 \\ x_2 & \overline{x}_3 \\ x_3 & \overline{x}_4 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ x_{n-2} & \overline{x}_{n-1} \\ x_{n-1} & \overline{x}_n \\ x_n & \overline{x}_1 \end{array} \right|
$$

b) Tracer successivement en deux couches, les deux schémas possibles utilisant uniquement des fonctions de type « ON », puis des fonctions de type « NI ». On supposera que l'on dispose des variables directes et complémentées x_i et $\overline{x}_i$.

Réponses :

Cf. figure 4.37 et 4.38.

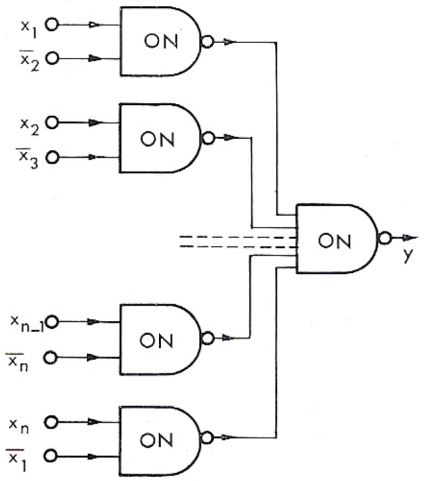


FIG. 4.37

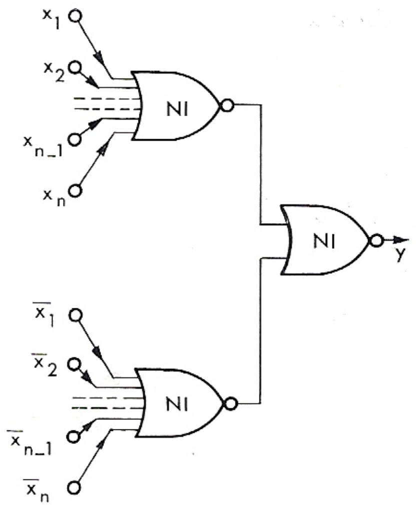


FIG. 4.38

2° *a*) On désire installer un « va-et-vient » de commande d'allumage comprenant les trois points de commande a, b et c. Etablir la table de vérité incomplète relative au circuit d'allumage en admettant que ce circuit est fermé ($y = 1$) lorsque le nombre des variables a, b ou c qui prennent la valeur « 1 » est impair.

b) Ecrire l'expression binaire du « va-et-vient » et montrer qu'elle peut être réalisée en pratique à l'aide de deux inverseurs et d'un permutateur. Inverseur et permutateur correspondent aux schémas des figures 4.39 et 4.40.

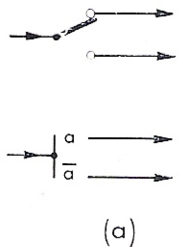


FIG. 4.39. — *Inverseur*

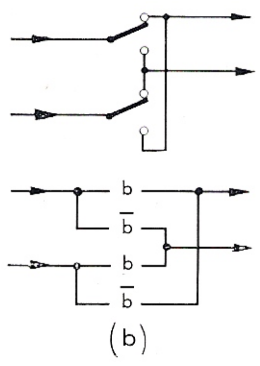


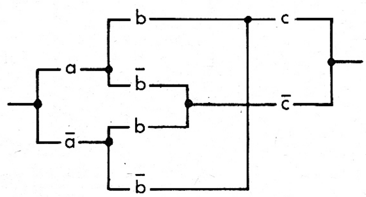
FIG. 4.40. — *Permutateur*

Réponses :

a)

a	b	c	y
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	1
1	1	1	1

b) $y = \left| \begin{array}{c} a \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} \\ \bar{a} \cdot b \cdot \bar{c} \\ \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot c \\ a \cdot b \cdot c \end{array} \right| =$



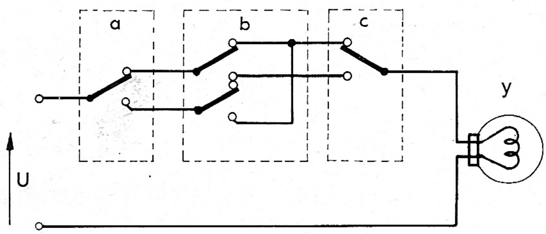


FIG. 4.41

3° On donne le schéma de la figure 4.42.

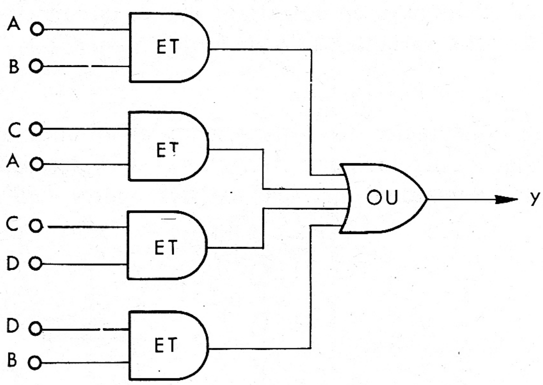


FIG. 4.42

a) Ecrire la fonction binaire « y » correspondante et réaliser le schéma à l'aide de circuits « ON » uniquement.

b) Simplifier la fonction « y » par mise en facteur, et l'écrire sous la forme d'un produit de deux produels.

Réaliser le schéma à l'aide de deux circuits « OU » et d'un circuit « ET », puis à l'aide de trois circuits « NI » seulement.

cu 37

Réponses :

$$a)\ y = \left|\begin{array}{c} A \cdot B \\ C \cdot A \\ C \cdot D \\ D \cdot B \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & B \\ D & \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} A & C \\ D & \end{array}\right| \left|\begin{array}{c|c} A & B \\ D & C \end{array}\right|$$

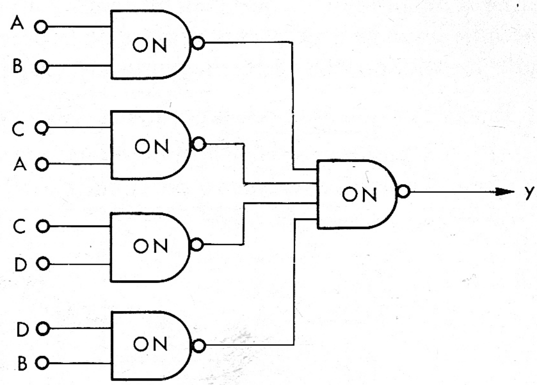


FIG. 4.43

$$\bar{y} = \left|\begin{array}{c|c|c|c} \bar{A} & \bar{A} & \bar{D} & \bar{D} \\ \bar{B} & \bar{C} & \bar{C} & \bar{B} \end{array}\right|$$

$$\bar{y} = \left|\begin{array}{c} \bar{A} \cdot \bar{D} \\ \bar{B} \cdot \bar{C} \end{array}\right|$$

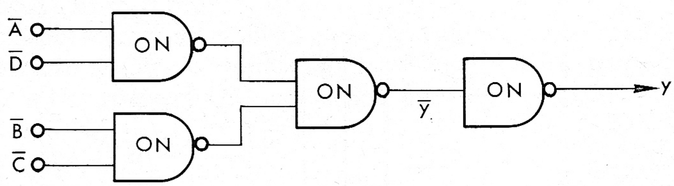


FIG. 4.44

$$b)\ y = \left|\begin{array}{c|c} A & \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \\ D & \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} A & B \\ D & C \end{array}\right|$$

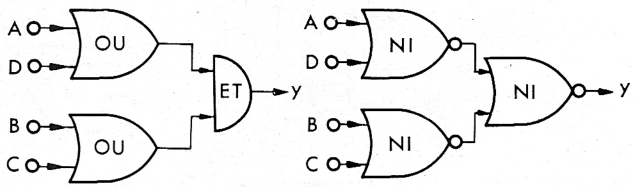


FIG. 4.45

4° *a*) Calculer et simplifier la fonction binaire $f\ (a, b, c, d)$ égale à l'unité pour les combinaisons de valeurs 2, 3, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, des variables prises dans l'ordre alphabétique.

b) Mettre la fonction sous la forme d'un produel de produits, puis sous la forme d'un produit de produels et, enfin, sous la forme maillée en faisant une mise en facteur de part et d'autre de la première expression et en rendant nulle la solution étrangère introduite de ce fait.

c) Réaliser ensuite les circuits optimaux correspondants aux trois cas suivants :

1 — Utilisation exclusive de circuits « ON »
2 — Utilisation exclusive de circuits « NI »
3 — Utilisation de relais.

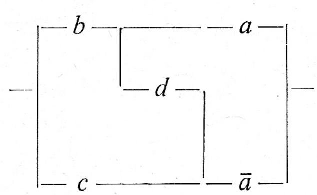
Réponses :

a)

$$f\,(a,\ b,\ c,\ d) = \left|\begin{array}{c|c|} b & \begin{array}{c} a \\ d \end{array} \\ & \\ c & \begin{array}{c} d \\ \bar{a} \end{array} \end{array}\right.$$

b)

$$f = \left|\begin{array}{c} a \cdot b \\ b \cdot d \\ d \cdot c \\ c \cdot \bar{a} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} b \\ c \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} a \\ c \\ d \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} \bar{a} \\ b \\ d \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} b \cdot \left|\begin{array}{c} a \\ d \cdot \bar{a} \end{array}\right. \\ c \cdot \left|\begin{array}{c} d \cdot a \\ \bar{a} \end{array}\right. \end{array}\right| =$$



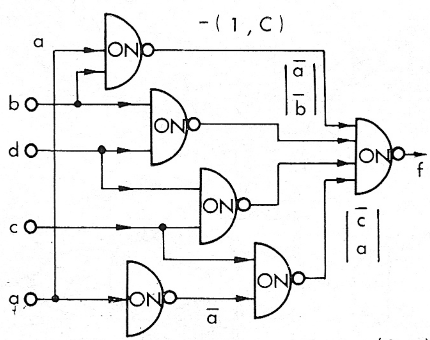


FIG. 4.46

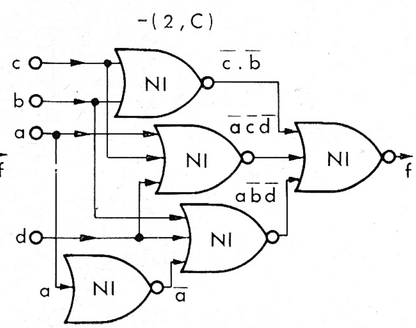


FIG. 4.47

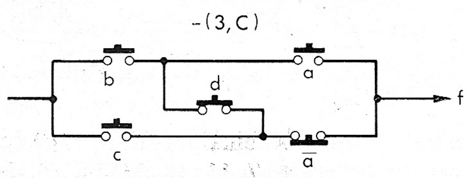


FIG. 4.48

5° On considère le schéma de la figure 4.49.

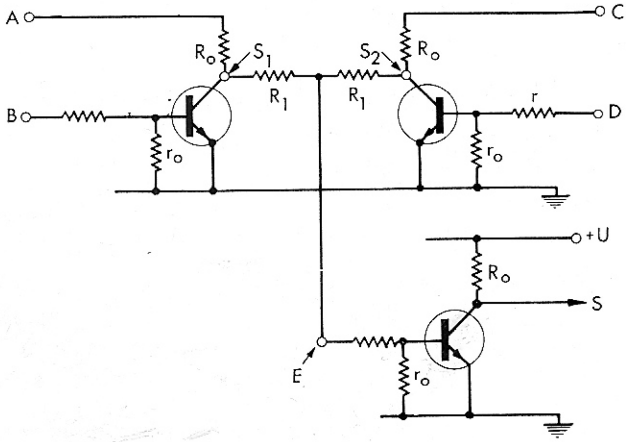


FIG. 4.49

Les transistors sont bloqués ou saturés suivant la répartition des tensions appliquées aux points A, B, C et D.

Etablir en fonction des valeurs de A, B, C ou D, les expressions binaires qui correspondent successivement aux points S_1, S_2, E et S. On admettra que le niveau logique « 1 » correspond à une tension positive appliquée au point considéré.

Réponses :

$$S_1 = A \cdot \bar{B} \;,\quad S_2 = C \cdot \bar{D} \;,\quad E = \left| \begin{array}{c} A \cdot \bar{B} \\ C \cdot \bar{D} \end{array} \right| \;,\quad S = \bar{E} = \left| \begin{array}{c|c} \bar{A} & \bar{C} \\ B & D \end{array} \right|$$

6° *a*) Ecrire la fonction « $f\ (x_o, x_1, x_2, a, b)$ » donnée par la table de vérité réduite suivante :

x_o	x_1	x_2	a	b	f
1	0	1	0	ϕ	1
0	1	ϕ	ϕ	0	1

Mettre « f » sous la forme d'une fonction carrée produit de deux facteurs dont l'un ne contient que des variables directes et l'autre des variables complémentées.

b) En supposant que l'on ne dispose que des variables directes, montrer que la fonction peut être réalisée en trois couches de façon optimale à l'aide de six circuits « NI » ou également à l'aide de six circuits « ON ». Représenter, dans les deux cas, les schémas correspondants.

Réponses :

— *a*) $f = \left| \begin{array}{c} x_o \cdot \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{a} \\ \bar{x}_o \cdot x_1 \cdot \bar{b} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} x_o \cdot x_2 \\ x_1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \cdot \bar{a} \\ \bar{x}_o \cdot \bar{b} \end{array} \right|$

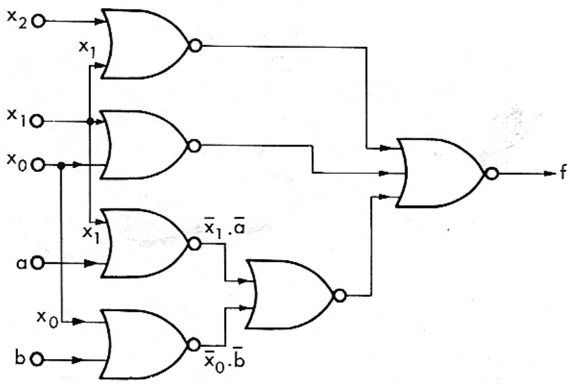


FIG. 4.50

— *b*) Réalisation optimale à l'aide de circuits « NI » (fig. 4.50) :

$$f = \left| \begin{array}{c} x_o \\ x_1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} x_2 \\ x_1 \end{array} \middle| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \cdot \bar{a} \\ \bar{x}_o \cdot \bar{b} \end{array} \right|$$

— Réalisation optimale à l'aide de circuits « ON » (fig. 4.51) :

$$f = \left| \begin{array}{l} x_o \cdot x_2 \cdot \left| \begin{array}{c} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_o \end{array} \right| \cdot \bar{a} \\ x_1 \cdot \left| \begin{array}{c} \bar{x}_o \\ \bar{x}_1 \end{array} \right| \cdot \bar{b} \end{array} \right|$$

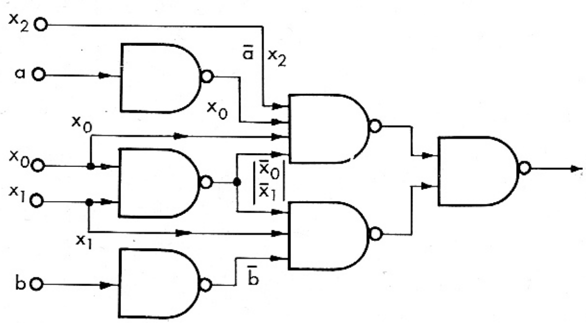


FIG. 4.51

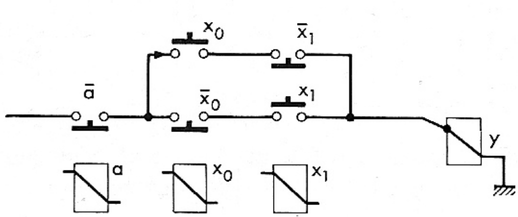


FIG. 4.52

7° On donne la chaîne de contact de la figure 4.52.

Ecrire la fonction binaire correspondante, puis faire le schéma en utilisant trois circuits « NI » en deux couches.

Montrer que le schéma peut être réalisé à l'aide de cinq circuits « NI » au maximum si l'on ne dispose que des variables directes.

Réponses :

$$y = \bar{a} \cdot \left| \begin{array}{c} x_o \cdot \bar{x}_1 \\ \\ x_1 \cdot \bar{x}_o \end{array} \right| = \bar{a} \cdot \left| \begin{array}{c|c} x_o & \bar{x}_1 \\ \\ x_1 & \bar{x}_o \end{array} \right|$$

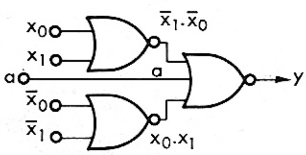


FIG. 4.53

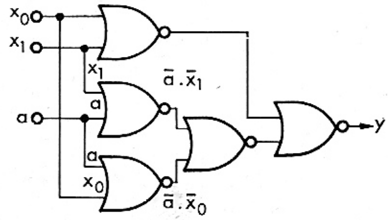


FIG. 4.54

8° Déterminer le circuit d'égalité, ou circuit de coïncidence, relatif aux deux nombres binaires de « n » chiffres, A_n et B_n.

— $A_n = a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$

— $B_n = b_n, b_{n-1}, \ldots, b_2, b_1$

a) Etablir, en premier lieu, la fonction binaire « F_n » telle que $F_n = 1$ lorsque $A_n = B_n$. On calculera, dans ce but, les fonctions $s_1, s_2, \ldots, s_n$ telles que $s_i = 1$ lorsque $a_i = b_i$.

b) Faire les schémas en utilisant des circuits « NI » :

1 — Dans le cas où le schéma est réalisé en deux couches et où l'on dispose à la fois des formes directes et complémentées des variables.

2 — Dans le cas où l'on dispose seulement des variables sous la forme directe.

Indiquer dans chaque cas le nombre de circuits « NI » nécessaires.

Réponses :

$$a)\ s_i = \left| \begin{array}{c} \bar{a}_i \cdot \bar{b}_i \\ \\ b_i \cdot a_i \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \bar{a}_i & \bar{b}_i \\ \\ b_i & a_i \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c|c} \bar{a}_i \cdot \bar{b}_i & \bar{a}_i \cdot \bar{b}_i \\ \\ a_i & b_i \end{array} \right|$$

$$F_n = s_1 \cdot s_2 \ldots s_{n-1} \cdot s_n = \left| \begin{array}{c|c|c|c} \bar{a}_1 & a_1 & \bar{a}_2 & a_2 \\ \\ b_1 & \bar{b}_1 & b_2 & \bar{b}_2 \end{array} \right| \ldots \left| \begin{array}{c|c|c|c} \bar{a}_{n-1} & a_{n-1} & \bar{a}_n & a_n \\ \\ b_{n-1} & \bar{b}_{n-1} & b_n & \bar{b}_n \end{array} \right|$$

$$F_n = \left| \begin{array}{c|c|c|c} \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 & \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 & \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2 & \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2 \\ \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \end{array} \right| \ldots \left| \begin{array}{c|c} \bar{a}_n \cdot \bar{b}_n & \bar{a}_n \cdot \bar{b}_n \\ \\ a_n & b_n \end{array} \right|$$

b)

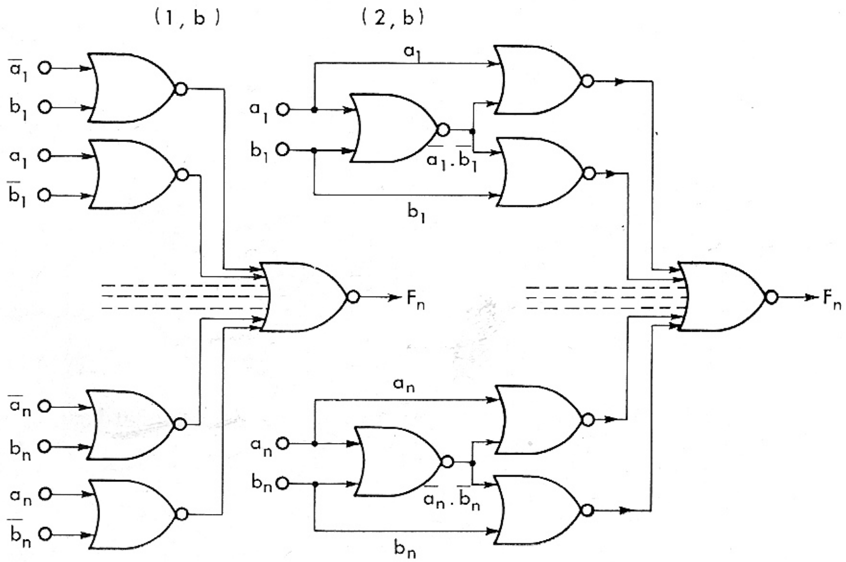


FIG. 4.55. — *Cas où l'on dispose des deux formes des variables.* Le schéma comprend alors (2 n + 1) circuits « NI » dont un à « 2 n » entrées.

FIG. 4.56. — *Cas où la forme directe des variables est seule disponible.* Dans ce cas, le schéma comprend (3 n + 1) circuits « NI » dont un à « 2 n » entrées.

9° Pour réaliser un circuit de coïncidence, on utilise la fonction binaire « F_n » suivante :

$$F_n = \begin{vmatrix} \bar{a}_1 \cdot \bar{b}_1 & \bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2 & \ldots & \bar{a}_n \cdot \bar{b}_n \\ a_1 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & & a_n \cdot b_n \end{vmatrix}$$

a) Etablir la loi de récurrence qui permet de passer de « F_{p-1} » à « F_p », F_p (F_{p-1}, a_p, b_p), puis en supposant que l'on dispose des variables directes et complémentées, montrer que la fonction « F_n » peut être réalisée à l'aide de « $3n$ » circuits « ON » ayant au maximum trois entrées.

b) Montrer que la complémentation de la formule de récurrence permet d'envisager la réalisation de la fonction « F_n » en utilisant « $3n + 1$ » circuits « NI » ne disposant que de trois entrées au maximum.

— Quel est, alors, dans chacun des deux cas précédents, le nombre des couches (circuits en cascade) utilisées ?

— Que peut-on en déduire quant au temps de réponse du circuit de coïncidence ainsi réalisé ?

Réponses :

a)
$$F_p = F_{p-1} \left| \begin{array}{c} \bar{a}_p \cdot \bar{b}_p \\ \\ a_p \cdot b_p \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} F_{p-1} \cdot \bar{a}_p \cdot \bar{b}_p \\ \\ F_{p-1} \cdot a_p \cdot b_p \end{array} \right|$$

élément itératif du circuit.

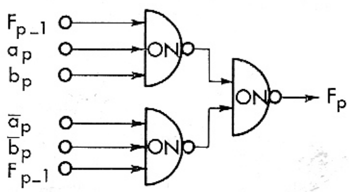


FIG. 4.57

Il faudra « $3n$ » circuits « ON », au total, avec « $2n$ » couches au maximum. Le temps de réponse maximal sera donc égal à $2n\tau$ en appelant « τ » le temps de réponse moyen d'un circuit « ON ».

b)
$$\bar{F}_p = \left| \begin{array}{c|c} \bar{F}_{p-1} & \bar{F}_{p-1} \\ \\ \bar{a}_p & a_p \\ \\ \bar{b}_p & b_p \end{array} \right|$$

Il faudra, dans ce cas, envisager un circuit « NI » supplémentaire pour complémenter $\bar{F}_n$, d'où « $3n + 1$ » circuits et « $2n + 1$ » couches avec un temps de réponse maximal égal à $(2n + 1) \cdot \tau$.

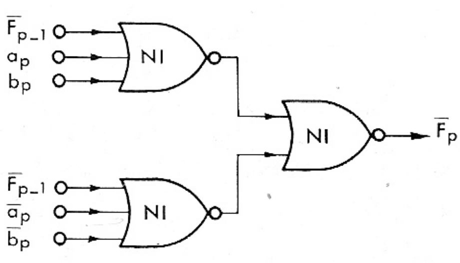


FIG. 4.58

CHAPITRE V

FONCTIONS DE TRANSCODAGE

Il est possible d'exprimer, de diverses façons, des combinaisons de valeurs binaires par des nombres entiers associés, exprimés dans le système de numération binaire.

Prenons, par exemple, les cinq variables x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, et choisissons *pour ces variables un ordre défini*, l'ordre inverse des indices par exemple. Tout nombre binaire de cinq chiffres peut alors représenter sans ambiguïté une combinaison de valeurs de ces cinq variables et une seule.

Le nombre (13) 01101_2 définit la combinaison, $x_5 = 0$, $x_4 = 1$, $x_3 = 1$, $x_2 = 0$, $x_1 = 1$.

Le nombre (26) 11010_2 définit la combinaison, $x_5 = 1$, $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_1 = 0$.

Lorsque le nombre est inférieur à (16) 10000_2, il faut écrire les cinq chiffres en complétant par des zéros les chiffres correspondant aux poids les plus élevés.

$x_5 = 0$, $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1$, $x_1 = 1$, correspond par exemple à (3), 00011_2.

*5.1. — **Définitions***

Nous appellerons fonction de transcodage toute fonction algébrique explicite discontinue et bornée faisant correspondre à des nombres entiers donnés « X_n » (vecteur variable ou vecteur de commande), des *nombres entiers* « Y_p » (vecteur fonction).

Une fonction de transcodage $\boxed{Y_p = F(X_n)}$ définit donc une application de l'ensemble des vecteurs « X_n » dans l'ensemble des vecteurs « Y_p ».

La fonction peut être représentée par un système de p fonctions binaires qui dépendent de « n » variables, en posant :

$$X_n = x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_2, x_1$$

$$Y_p = y_p, y_{p-1}, y_{p-2}, \ldots, y_2, y_1$$

Nous obtenons alors le système suivant :

$$Y_p\ (X_n)\quad \left|\begin{array}{lll} y_p & = y_p & (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) \\ y_{p-1} & = y_{p-1} & (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ \multicolumn{3}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ y_2 & = y_2 & (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) \\ y_1 & = y_1 & (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1) \end{array}\right.$$

5.2. — **Propriétés des fonctions de transcodage**

Une fonction de transcodage $Y_p = F(X_n)$ *fait correspondre à toute valeur entière du vecteur de commande* « X_n », *une valeur entière du vecteur fonction* « Y_p » *et une seule.*

Cette propriété essentielle caractérise les fonctions de transcodage que l'on peut représenter graphiquement dans un plan ramené à deux axes de coordonnées OX et OY. *Le graphe obtenu se limite à un ensemble fini de points absolument indépendants les uns des autres.* Ce qui signifie qu'il est toujours possible de choisir pour quelques points ou pour la totalité des points du graphe, un ordre de succession quelconque.

Réciproquement, si à chaque valeur de « X_n » *d'un graphe donné correspond une valeur de* « Y_p » *et une seule, le graphe considéré définit une fonction de transcodage.*

Notons que les fonctions élémentaires « y_i » du vecteur « Y_p » sont des fonctions binaires au sens défini dans les chapitres précédents $y_i \in E_{01}$. Les résultats établis concernant l'utilisation des tables de vérité, et toutes les méthodes de simplification étudiées précédemment, leur sont applicables.

Pour conserver une représentation homogène, nous conviendrons d'écrire la table de vérité d'une fonction de transcodage en plaçant à gauche d'un double trait vertical les composantes du vecteur de commande et, à droite, celles du vecteur fonction. L'établissement des fonctions binaires « y_i » ne présente aucune difficulté comme le montre l'exemple suivant :

Soit à établir la fonction de transcodage :

$$Y_{(6)}\ (*) = X^2_{(3)}\ (*)$$

$$X = x_3, x_2, x_1 \qquad Y = y_6, y_5, y_4, y_3, y_2, y_1$$

(*) L'indice placé au bas du vecteur variable ou du vecteur fonction indique le nombre de composantes de ce vecteur, c'est-à-dire le nombre de chiffres binaires associés.

Table de vérité

	— X —			— Y —						
	x_3	x_2	x_1	y_6	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
2	0	1	0	0	0	0	1	0	0	4
3	0	1	1	0	0	1	0	0	1	9
4	1	0	0	0	1	0	0	0	0	16
5	1	0	1	0	1	1	0	0	1	25
6	1	1	0	1	0	0	1	0	0	36
7	1	1	1	1	1	0	0	0	1	49

Nous tirons immédiatement de la table de vérité :

$$y_1 = x_1 \qquad y_4 = \left|\begin{array}{c} \bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \\ \\ x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 \end{array}\right| = x_1 \cdot \left|\begin{array}{c} \bar{x}_3 \\ \\ \bar{x}_2 \end{array}\right| \left.\begin{array}{c} x_2 \\ \\ x_3 \end{array}\right|$$

$$y_2 = 0 \qquad y_5 = \left|\begin{array}{c} x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \\ \\ x_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 \\ \\ x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \end{array}\right| = x_3 \cdot \left|\begin{array}{c} x_1 \\ \\ \bar{x}_2 \end{array}\right|$$

$$y_3 = \left|\begin{array}{c} \bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \\ \\ x_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \end{array}\right| \qquad y_6 = \left|\begin{array}{c} x_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \\ \\ x_3 \cdot x_2 \cdot x_1 \end{array}\right| = x_2 \cdot x_3$$

$$= x_2 \cdot \bar{x}_1$$

Il arrive souvent, comme dans le cas de la figure 5.1 suivante, qu'une fonction de transcodage soit incomplètement définie, lorsqu'un certain nombre

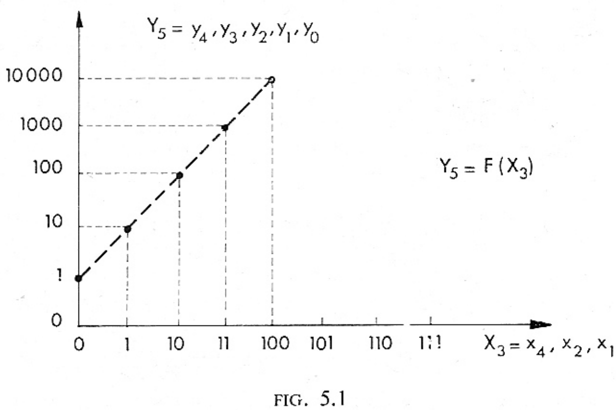


FIG. 5.1

de valeurs peuvent être arbitrairement fixées. Ces valeurs correspondent à des combinaisons disponibles.

Il y a lieu de choisir, alors, ces combinaisons disponibles de façon à simplifier au mieux les fonctions binaires calculées. Reportons nous à la représentation graphique de la figure 5.1.

On peut, en partant du graphe, établir une table de vérité dans laquelle les combinaisons :

$$X = 101, \quad X = 110, \quad X = 111 \text{ sont disponibles.}$$

	X			Y					
	x_4	x_2	x_1	y_4	y_3	y_2	y_1	y_o	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1	0	2
2	0	1	0	0	0	1	0	0	4
3	0	1	1	0	1	0	0	0	8
4	1	0	0	1	0	0	0	0	16
5	1	0	1	1			1		combinaisons
6	1	1	0	1		1			disponibles
7	1	1	1	1	1				

En utilisant au mieux les combinaisons disponibles, nous voyons que « y_1 » peut être simplifiée par adjacence en associant 1 et 5, « y_2 » peut être simplifiée en associant 2 et 6, « y_3 » en associant 3 et 7 et « y_4 » en associant 4–5–6 et 7.

Ce qui donne :

$$y_o = \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \qquad y_2 = \left| \begin{matrix} \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \\ x_4 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \end{matrix} \right| = x_2 \cdot \bar{x}_1$$

$$y_1 = \left| \begin{matrix} \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 \\ x_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 \end{matrix} \right| = \bar{x}_2 \cdot x_1 \qquad y_3 = \left| \begin{matrix} \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot x_1 \\ x_4 \cdot x_2 \cdot x_1 \end{matrix} \right| = x_2 \cdot x_1$$

$$y_4 = x_4$$

Notons que la fonction de transcodage considérée correspond à :

$$\boxed{Y_{(5)} = 2^{X_{(3)}}}$$

à condition de limiter $Y_{(5)}$ à (16) 10000_2.

5.3. — ***Formes de transcodage***

Lorsque les fonctions binaires élémentaires qui constituent une fonction de transcodage sont exprimées séparément en fonction des variables « x_i » du vecteur de commande, on dit que la fonction de transcodage *se présente sous forme développée.*

C'est le cas des deux exemples précédents.

Une fonction de transcodage peut cependant revêtir d'autres formes parmi lesquelles nous distinguerons principalement : *la forme maillée ou arborescente*, la forme *paramétrique* et la forme *itérative.*

5.31. — ***Forme maillée ou arborescente.*** — C'est une forme que l'on obtient en procédant à des mises en facteur sur plusieurs fonctions binaires groupées appartenant à un système de transcodage.

Prenons, par exemple, la forme développée suivante :

$$
\begin{aligned}
y_o &= \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 \\
y_1 &= \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1 \\
y_2 &= \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1 \\
y_3 &= \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot x_1 \\
y_4 &= x_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1
\end{aligned}
$$

Nous pouvons l'écrire sous forme maillée ou arborescente :

$$
-\left|\begin{array}{l}
\bar{x}_4 \cdot \left|\begin{array}{l}
\bar{x}_2 \left|\begin{array}{l} \bar{x}_1 = y_o \\ x_1 = y_1 \end{array}\right. \\
x_2 \left|\begin{array}{l} \bar{x}_1 = y_2 \\ x_1 = y_3 \end{array}\right.
\end{array}\right. \\
x_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1 = y_4
\end{array}\right.
\qquad \text{ou encore} \qquad
-\left|\begin{array}{l}
\bar{x}_1 \left|\begin{array}{l}
\bar{x}_2 \left|\begin{array}{l} \bar{x}_4 = y_o \\ x_4 = y_4 \end{array}\right. \\
x_2 \cdot \bar{x}_4 = y_2
\end{array}\right. \\
x_1 \cdot \bar{x}_4 \left|\begin{array}{l} \bar{x}_2 = y_1 \\ x_2 = y_3 \end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

Nous obtenons des réseaux à structure arborescente ou pyramidale qui ont surtout un intérêt lorsque les fonctions binaires élémentaires sont des produits.

5.32. — ***Forme paramétrique.*** — Elle se caractérise par la substitution de fonctions ou paramètres à des groupes fonctionnels de variables qui apparaissent simultanément dans plusieurs fonctions binaires élémentaires du même système de transcodage.

Rien ne s'oppose à ce que le paramètre soit, dans certains cas, une fonction binaire du système lui-même.

Considérons, par exemple, la fonction de transcodage développée :

$$\left| \begin{array}{l} y_o = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\[2ex] y_1 = x_1 \cdot \bar{x}_2 = \left| \begin{array}{c} x_1 \\[2ex] x_2 \end{array} \right| \cdot \bar{x}_2 \\[4ex] y_2 = \bar{x}_1 \cdot x_2 = \left| \begin{array}{c} x_1 \\[2ex] x_2 \end{array} \right| \cdot \bar{x}_1 \end{array} \right.$$

Nous constatons qu'en posant $a = \left| \begin{array}{c} x_1 \\[2ex] x_2 \end{array} \right|$, nous pouvons écrire la forme paramétrique :

$$a = \left| \begin{array}{c} x_1 \\[2ex] x_2 \end{array} \right|$$

$$y_o = \bar{a}$$

$$y_1 = a \cdot \bar{x}_2$$

$$y_2 = a \cdot \bar{x}_1$$

mais nous pouvons écrire également :

$$\begin{array}{l} y_o = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \\[2ex] y_1 = \bar{y}_o \cdot \bar{x}_2 \text{ ou encore} \\[2ex] y_2 = \bar{y}_o \cdot \bar{x}_1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = y_o \\[2ex] \bar{y}_o \left| \begin{array}{l} \bar{x}_1 = y_2 \\[2ex] \bar{x}_2 = y_1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

5.33. — ***Forme itérative.*** — La forme itérative est une forme paramétrique particulière qui s'établit lorsque les fonctions élémentaires d'un système de transcodage *sont reliées entre elles par une loi de récurrence.*

$\mathbf{y}_p = \mathbf{y}_{p-1} \cdot \mathbf{x}_p$ est un exemple simple de récurrence qui conduit, si l'on pose $y_o = x_o$, à la forme itérative suivante :

$$\left| \begin{array}{l} y_o = x_o \\[2ex] y_1 = y_o \cdot x_1 \\[2ex] y_2 = y_1 \cdot x_2 \\[1ex] \dotfill \\[1ex] y_n = y_{n-1} \cdot x_n \end{array} \right.$$

On peut, en partant d'une forme itérative, retrouver la forme développée correspondante :

$$
\left|
\begin{array}{l}
y_o = x_o \\
y_1 = x_o \cdot x_1 \\
y_2 = x_o \cdot x_1 \cdot x_2 \\
\cdot \\
\cdot \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\cdot \\
\cdot \\
y_n = x_o \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_n
\end{array}
\right.
$$

On peut même, le cas échéant, l'écrire sous forme maillée :

$$- x_o - = y_o$$

$$x_1 - = y_1$$

$$x_2 - = y_2$$

$$x_3 - = y_3$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n - = y_n$$

L'avantage d'une forme itérative est de pouvoir être déterminée à partir de tables de vérité très simples où les fonctions binaires apparaissent également comme des variables selon la valeur de l'indice considéré.

Dans le cas de l'exemple traité, la table de vérité est particulièrement simple :

variables		*fonction*
x_p	y_{p-1}	y_p
1	1	1

Le double trait vertical de séparation permet systématiquement de distinguer dans toute table de vérité, les éléments considérés comme variables (à gauche) de ceux qui ont été choisis comme fonctions (à droite).

La forme itérative est, en conclusion, celle que l'on rencontre le plus souvent en pratique. Elle résulte du fait que la recherche des algorithmes dans les systèmes de traitement numérique de l'information procède, le plus souvent, de lois de récurrence liées à la distribution des fonctions.

5.4. — Simplification des fonctions de transcodage

Comme dans le cas des fonctions binaires, l'optimisation des fonctions de transcodage est un problème qui ne peut être résolu de façon systématique.

Il est, d'ailleurs, illusoire de vouloir optimiser si l'on ne s'est pas donné, au préalable, une *règle précise d'optimisation.*

Ce serait vouloir résoudre un problème en ignorant l'une de ses principales données. Une règle étant fixée, il faut encore l'assortir d'hypothèses complémentaires (hypothèse d'additivité par exemple). Ces règles et ces hypothèses ont, à priori, un caractère arbitraire qui dépend essentiellement du but recherché, et laissent entrevoir les difficultés du problème lorsqu'il est considéré dans sa généralité.

Il est donc sage de nous limiter, comme nous l'avons déjà fait, à l'établissement de méthodes de simplification, qui sans prétendre à l'optimisation, permettent d'obtenir des formes plus accessibles à la compréhension ou mieux adaptées aux réalisations pratiques.

La simplification des formes paramétriques conduit souvent à la recherche de facteurs directs et de facteurs duals communs à plusieurs fonctions binaires. Pour opérer avec facilité, il suffit de se référer aux deux théorèmes suivants :

5.41. — **Théorème.** — *Tous les facteurs ou implicants communs à « p » fonctions binaires élémentaires $y_1, y_2, ..., y_p$, sont facteurs ou implicants du produel de ces fonctions.*

Considérons, en effet, le produel $\pi_f = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{vmatrix}$.

π_f est un implicant de toutes les fonctions « y_i ».

$$\left(\pi_f = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_p \end{vmatrix}\right) \Rightarrow (y_i = \pi_f \cdot y_i, \qquad \forall\ i = 1, 2, ...\ p)$$

Tout facteur « f » commun aux fonctions « y_i » est réciproquement facteur de « π_f ».

$$(y_1 = f \cdot h_1, \quad y_2 = f \cdot h_2, \ldots, y_p = f \cdot h_p) \Rightarrow \left(\pi_f = f \cdot \left| \begin{array}{c} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_p \end{array} \right| \right)$$

5.42. — **Théorème.** — *Tous les facteurs ou implicants duals communs à « p » fonctions binaires élémentaires $y_1, y_2, \ldots, y_p$, sont facteurs ou implicants duals du produit de ces fonctions.*

Soit le produit $P_f = y_1 \cdot y_2 \ldots y_p$

P_f est un implicant dual de toutes les fonctions « y_i ».

$$(P_f = y_1 \cdot y_2 \ldots y_p) \Rightarrow \left(y_i = \left| \begin{array}{c} y_i \\ \\ P_f \end{array} \right|, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots, p \right)$$

Réciproquement, tout facteur dual « f » commun aux « p » fonctions « y_i » est facteur dual de « P_f ».

$$\left(y_1 = \left| \begin{array}{c} f \\ \\ g_1 \end{array} \right|, y_2 = \left| \begin{array}{c} f \\ \\ g_2 \end{array} \right|, \ldots, y_p = \left| \begin{array}{c} f \\ \\ g_p \end{array} \right| \right) \Rightarrow \left(P_f = \left| \begin{array}{c} -f- \\ \\ g_1 \cdot g_2 \ldots g_p \end{array} \right| \right)$$

5.43. — **Corollaire.** — Donnons-nous deux fonctions binaires qui dépendent des mêmes variables; $y_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y_2\ (x_1, x_2, \ldots x_n)$. Supposons connues, en totalité, les « p » combinaisons repérées par les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$, pour lesquelles $y_1 = 1$ et $y_2 = 0$, ainsi que la totalité des « q » combinaisons repérées par les nombres $b_1, b_2, \ldots, b_q$ pour lesquelles $y_1 = 0$ et $y_2 = 1$.

Calculons les « p » produels $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_p$ respectivement nuls pour les combinaisons $a_1, a_2, \ldots, a_p$ des variables et les « q » produits $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ respectivement égaux à l'unité pour les combinaisons $b_1, b_2, \ldots, b_q$ des variables. Nous pouvons, alors, écrire les deux relations :

$$y_2 = \left| \begin{array}{c} y_1 \cdot \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 \ldots \bar{f}_p \\ -\ \varphi_1\ - \\ -\ \varphi_2\ - \\ \cdots\cdots\cdots \\ -\ \varphi_q\ - \end{array} \right| , \quad y_1 = \left| \begin{array}{c} y_2 \cdot \bar{\varphi}_1 \cdot \bar{\varphi}_2 \ldots \bar{\varphi}_q \\ -\ f_1\ - \\ -\ f_2\ - \\ \cdots\cdots\cdots \\ -\ f_p\ - \end{array} \right|$$

5.5. — *Etude d'une fonction de transcodage (addition binaire)*

Pour étudier un système complexe de transcodage, il faut procéder, d'abord, à une décomposition suivant des fonctions plus simples en analysant les particularités du système, connues généralement à l'origine.

La décomposition doit se faire en rassemblant au mieux les fonctions élémentaires qui admettent des produits ou des produels communs. Il est intéressant, par conséquent, de grouper les fonctions ayant un maximum de variables communes, de facteurs ou de facteurs duals communs en procédant éventuellement à des complémentations susceptibles de faire apparaître des relations simplificatrices.

Il est indiqué, surtout, de faire apparaître des relations de récurrence qui peuvent mener à des formes itératives faciles à traiter. C'est tout l'art de l'ingénieur que de procéder à des choix judicieux qui dépendent beaucoup des buts envisagés et ne peuvent pas toujours faire l'objet d'une étude systématique. L'essentiel est de disposer, en définitive, de l'outil mathématique indispensable et d'apprendre, par l'exemple, à l'utiliser.

Etablissons, en particulier, la fonction de transcodage qui correspond à *l'addition binaire*.

Deux nombres binaires de « n » chiffres : $A_n = a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$, $B_n = b_n, b_{n-1}, \ldots, b_2, b_1$ et leur somme binaire : $S_n = s_n, s_{n-1}, \ldots, s_2, s_1$, définissent une fonction de transcodage.

$$S_n = T(A_n, B_n) = A_n + B_n$$

Considérons l'addition des deux valeurs particulières :

$$A_n = \ldots 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ (93)_{10}$$

et

$$B_n = \ldots 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ (39)_{10}$$

$$\begin{array}{rl}
\ldots 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0 & \leftarrow \text{report des retenues} \\
\ldots 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1 & \leftarrow A_n \quad\ \ 93 \\
+\ \ldots 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 & \leftarrow B_n \ + 39 \\
\hline
\ldots 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0 & \leftarrow S_n \quad\ 132
\end{array}$$

En désignant par « r_p » la retenue relative à l'addition des éléments de poids « p » nous pouvons donc écrire :

$$r_{p-1} + a_p + b_p = r_p, s_p$$

cette relation de récurrence très simple mène à la table de vérité et au graphe de la figure 5.2.

	r_{p-1}	a_p	b_p	r_p	s_p	
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
2	0	1	0	0	1	1
3	0	1	1	1	0	2
4	1	0	0	0	1	1
5	1	0	1	1	0	2
6	1	1	0	1	0	2
7	1	1	1	1	1	3

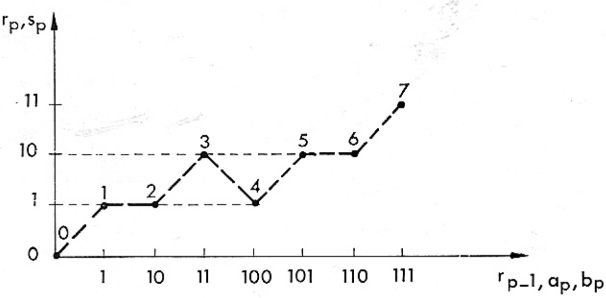


FIG. 5.2

Nous voyons sur le graphe que les points 1, 2, 4 et 3, 5, 6 correspondent respectivement à une même valeur du vecteur fonction « r_p, s_p ».

Le vecteur « $\bar{r}_p$, s_p » est donc nul pour les combinaisons 3, 5 et 6 des variables, ce qui signifie que les produels correspondant à ces combinaisons sont des facteurs communs aux fonctions binaires $\bar{r}_p$ et s_p que nous pouvons tirer immédiatement de la table de vérité.

$$\bar{r}_p = \left| \begin{array}{c|c|c|c} r_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} \\ \bar{a}_p & a_p & \bar{a}_p & \bar{a}_p \\ \bar{b}_p & \bar{b}_p & b_p & \bar{b}_p \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \bar{a}_p \\ \bar{b}_p \end{array} \right. \left| \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\bar{r}_{p-1}} \\ a_p & b_p \\ \bar{b}_p & \bar{a}_p \end{array} \right|$$

$$s_p = \left| \begin{array}{c|c|c|c} r_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & r_{p-1} \\ \bar{a}_p & a_p & \bar{a}_p & a_p \\ \bar{b}_p & \bar{b}_p & b_p & b_p \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{r_{p-1}} & \multicolumn{2}{c}{\bar{r}_{p-1}} \\ \bar{a}_p & b_p & a_p & b_p \\ \bar{b}_p & a_p & \bar{b}_p & \bar{a}_p \end{array} \right|$$

En posant $\alpha_p = \left| \begin{array}{c|c} \bar{a}_p & b_p \\ \bar{b}_p & a_p \end{array} \right|$ nous pouvons écrire le système d'addition binaire sous une forme qui est à la fois *itérative*, *paramétrique* et *maillée* :

$$-\left|\begin{array}{l|l} \bar a_1 & \left|\begin{array}{c} b_1 \\ a_1 \end{array}\right| - = \alpha_1 = s_1 \\ \bar b_1 & - = \bar r_1 \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{c|c} \bar a_2 & b_2 \\ \bar b_2 & a_2 \end{array}\right| - = \alpha_2 \qquad -\left|\begin{array}{c|l} \bar r_1 & \left|\begin{array}{c} \bar a_2 \\ \bar b_2 \end{array}\right| - = \bar r_2 \\ \bar \alpha_2 & \left|\begin{array}{c} \alpha_2 \\ r_1 \end{array}\right| - = s_2 \end{array}\right.$$

. . . .

$$\left|\begin{array}{c|c} \bar a_p & b_p \\ \bar b_p & a_p \end{array}\right| - = \alpha_p \qquad -\left|\begin{array}{c|l} \bar r_{p-1} & \left|\begin{array}{c} \bar a_p \\ \bar b_p \end{array}\right| - = \bar r_p \\ \bar \alpha_p & \left|\begin{array}{c} \alpha_p \\ r_{p-1} \end{array}\right| - = s_p \end{array}\right.$$

. . . .

$$\left|\begin{array}{c|c} \bar a_n & a_n \\ \bar b_n & b_n \end{array}\right| - = \alpha_n \qquad -\left|\begin{array}{c|l} \bar r_{n-1} & \left|\begin{array}{c} \bar a_n \\ \bar b_n \end{array}\right| - = \bar r_n \\ \bar \alpha_n & \left|\begin{array}{c} \alpha_n \\ r_{n-1} \end{array}\right| - = s_n \end{array}\right.$$

Pour réaliser le système de transcodage de façon optimale en utilisant des circuits « ON », nous écrirons :

$$r_p = \left|\begin{array}{c} a_p \cdot r_{p-1} \\ b_p \cdot r_{p-1} \\ a_p \cdot b_p \end{array}\right|, \qquad s_p = \left|\begin{array}{c} -\bar r_p \cdot \left|\begin{array}{c} r_{p-1} \\ a_p \\ b_p \end{array}\right| \\ r_{p-1} \cdot a_p \cdot b_p \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} \left|\begin{array}{c} \bar r_{p-1} \\ \bar a_p \end{array}\right| \begin{array}{c} \bar r_{p-1} \\ \bar b_p \end{array}\right| \cdot r_{p-1} \\ \begin{array}{c} \bar a_p \\ \bar b_p \end{array} \left|\begin{array}{c} \bar r_{p-1} \\ \bar a_p \end{array}\right| \cdot a_p \\ \begin{array}{c} \bar a_p \\ \bar b_p \end{array} \left|\begin{array}{c} \bar r_{p-1} \\ \bar b_p \end{array}\right| \cdot b_p \\ - \; r_{p-1} \cdot a_p \cdot b_p \; - \end{array}\right|$$

Ce qui permet de réaliser le circuit de la figure 5.3.

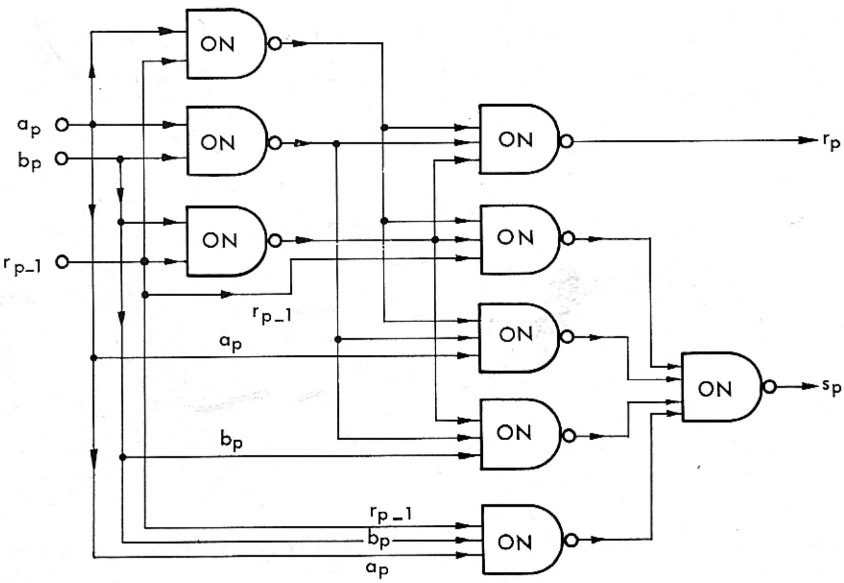


FIG. 5.3

Pour chaque couple de chiffres binaires additionnés, 9 circuits « ON » sont nécessaires, au minimum, lorsque l'on ne dispose que des variables directes.

$$r_p = \left| \begin{array}{c|c|c} a_p & r_{p-1} & r_{p-1} \\ b_p & a_p & b_p \end{array} \right| , \qquad s_p = \left| \begin{array}{c|c|c|c} \bar{r}_{p-1} \cdot \bar{a}_p & \bar{r}_{p-1} \cdot \bar{b}_p & \bar{a}_p \cdot \bar{b}_p & r_{p-1} \\ \bar{r}_{p-1} \cdot \bar{b}_p & \bar{a}_p \cdot \bar{b}_p & \bar{r}_{p-1} \cdot \bar{a}_p & a_p \\ r_{p-1} & b_p & a_p & b_p \end{array} \right|$$

Sans qu'il soit besoin de faire un schéma, nous voyons qu'il faudra également 9 circuits « NI » si l'on ne dispose que des variables directes.

Il est possible, cependant, d'envisager une décomposition différente de la fonction de transcodage, si l'on considère deux additions successives :

— 1[re] addition — $a_p + b_p = x_p, z_p$

— 2[e] addition — $r_{p-1} + z_p = y_p, s_p$

— retenue — $x_p + y_p = r_p$

Ces additions correspondent aux tables de vérité suivantes :

a_p	b_p	x_p	z_p
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

r_{p-1}	z_p	y_p	s_p
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

d'où les fonctions :

$$— z_p = \left|\begin{array}{c|c} a_p & \bar{a}_p \\ b_p & \bar{b}_p \end{array}\right|, \qquad x_p = a_p \cdot b_p$$

$$— s_p = \left|\begin{array}{c|c} r_{p-1} & \bar{r}_{p-1} \\ z_p & \bar{z}_p \end{array}\right|, \qquad y_p = r_{p-1} \cdot z_p, \qquad r_p = \left|\begin{array}{c} x_p \\ y_p \end{array}\right|.$$

Nous pouvons faire correspondre à ces fonctions, les schémas de la figure 5.4.

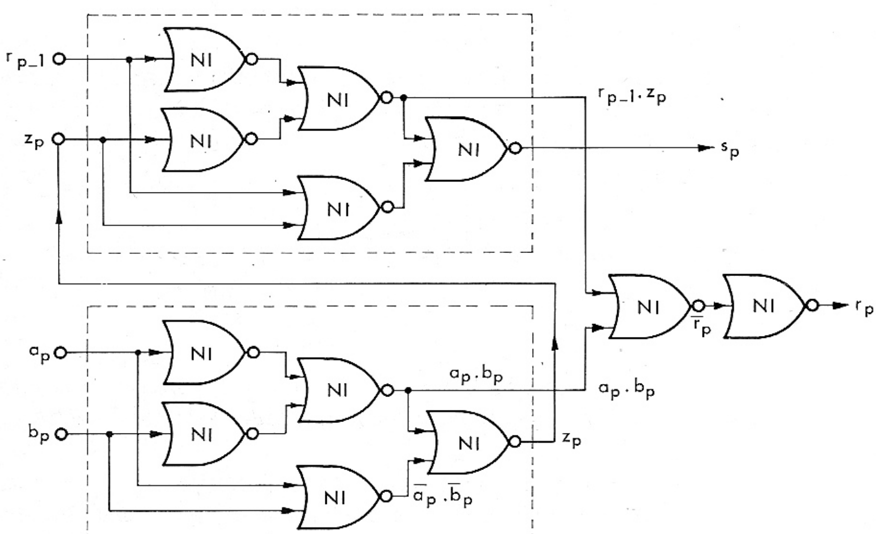


FIG. 5.4

Les deux circuits identiques qui fournissent « z_p » et « s_p » sont appelés « demi-additionneurs ».

5.6. — *Etude d'une fonction de transcodage itérative*

Il s'agit d'étudier la fonction de transcodage, $Y_n = y_n^n, y_n^{n-1}, \ldots, y_n^p, \ldots, y_n^1, y_n^o$, dans laquelle chaque composante « y_n^p » représente une fonction binaire des « n » variables $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1 = X_n$, telle que « y_n^p » prenne la valeur unité, lorsque « p » variables et « p » seulement, appartenant à « X_n » sont égales à l'unité.

Il y a lieu de rechercher, d'abord, une loi de récurrence qui permette de résoudre simplement le problème de transcodage en écrivant la fonction sous forme itérative. Dans ce but, nous supposerons connu le vecteur fonction

$$Y_{n-1} = y_{n-1}^{n-1}, y_{n-1}^{n-2}, \ldots, y_{n-1}^p, y_{n-1}^{p-1}, \ldots, y_{n-1}^1, y_{n-1}^o,$$

qui comprend une fonction et une variable binaires de moins que le vecteur « Y_n ».

Un raisonnement simple permet de constater que $y_{n-1}^p = 1$ entraîne nécessairement $y_n^p = 1$ lorsque $x_n = 0$, et que si $x_n = 1$, c'est $y_{n-1}^{p-1} = 1$ qui entraîne nécessairement $y_n^p = 1$. Dans tous les autres cas, y_n^p est nulle et nous pouvons, en conséquence, écrire la table de vérité réduite suivante :

x_n	y_{n-1}^{p-1}	y_{n-1}^p	y_n^p
0	ϕ	1	1
1	1	ϕ	1

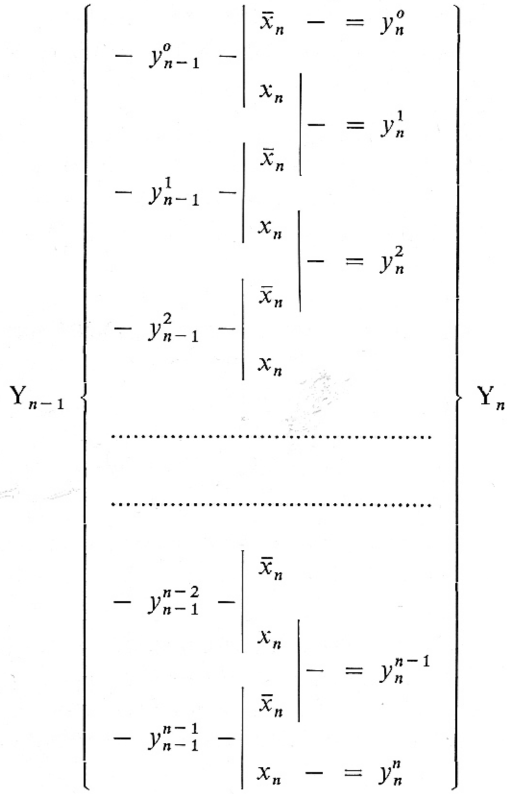
d'où nous tirons la fonction carrée biforme de récurrence :

$$y_n^p = \begin{vmatrix} \bar{x}_n \cdot y_{n-1}^p \\ \\ y_{n-1}^{p-1} \cdot x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{x}_n & y_{n-1}^p \\ \\ y_{n-1}^{p-1} & x_n \end{vmatrix}$$

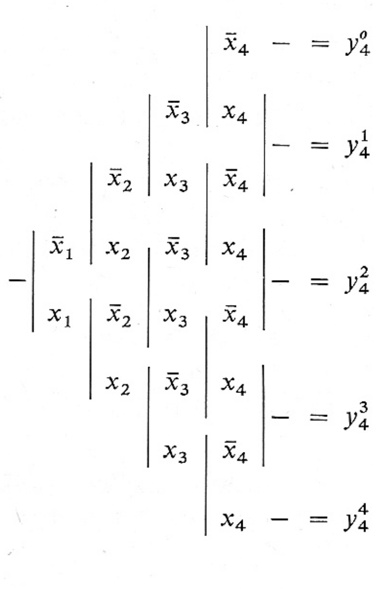
Les fonctions extrêmes se simplifient et s'écrivent :

$$y_n^n = x_n \cdot y_{n-1}^{n-1} \quad et \quad y_n^o = \bar{x}_n \cdot y_{n-1}^o$$

Le vecteur « Y_n » peut se déduire en définitive du vecteur « Y_{n-1} » en mettant la fonction de transcodage sous forme itérative et maillée :



La figure ci-après représente, à titre d'exemple, la fonction de transcodage Y_4 exprimée sous forme maillée en utilisant toutes les variables.



Il est intéressant de constater, d'autre part, qu'il existe une relation entre les fonctions « Y_n » et les fonctions binaires « majorité » étudiées au chapitre précédent.

La fonction « majorité » M_n^p est égale, en effet, au produel des fonctions y_n^p, y_n^{p+1}, ..., y_n^{n-1}, y_n^n, soit :

$$M_n^p = \left| \begin{array}{c} y_n^n \\ y_n^{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n^{p+1} \\ y_n^p \end{array} \right|$$

*5.7. — **Codes binaires décimaux***

L'habitude étant acquise et imposée légalement, d'utiliser le système décimal, il est nécessaire de pouvoir adapter des circuits binaires à ce système particulier à l'aide de codes binaires décimaux.

Le code couramment utilisé, appelé décimal codé binaire (D.C.B.) ou (8.4.2.1), est un code pondéré qui suit la numération binaire jusqu'au chiffre « 9 », en partant du zéro et en laissant disponibles, en général, les combinaisons qui vont de 10 à 16.

On peut imaginer, cependant, de nombreux autres codes binaires décimaux mieux adaptés à certaines utilisations ou répondant à des conditions particulières.

Quelques-uns, parmi les codes les plus courants, sont indiqués dans le tableau suivant :

Chiffres décimaux	*Code D.C.B*				*Code autocomplémentaire*				*Code biquinaire*			
	8	4	2	1	2	4	2	1	5	4	2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
4	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
6	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0
8	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
9	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0

Les codes figurant dans ce tableau sont des codes *pondérés*, parce que chaque chiffre binaire est affecté du poids qui apparaît en chiffre décimal dans la même colonne.

Le code (2.4.2.1) est un code dit « autocomplémentaire », car le complément à « 9 » de chaque chiffre décimal représenté, s'obtient en remplaçant la valeur « 0 » par la valeur « 1 » et réciproquement dans le nombre binaire associé.

Le chiffre « 6 » est exprimé par le nombre binaire 0 0 1 1, son complément à « 9 », c'est-à-dire le chiffre « 3 » correspond alors à 1 1 0 0.

Les codes autocomplémentaires, utilisés dans les calculateurs, permettent de procéder à des soustractions en additionnant les nombres binaires complémentaires qui correspondent aux chiffres décimaux à soustraire.

Il existe aussi des codes *non pondérés* qui présentent certains avantages particuliers malgré l'absence de relation de poids entre les chiffres binaires et les chiffres décimaux représentés.

— Exemples de codes non pondérés :

Chiffres décimaux	*Code «excédant 3» ou de Stibitz*	*Code Gray*
0	0 0 1 1	0 0 0 0
1	0 1 0 0	0 0 0 1
2	0 1 0 1	0 0 1 1
3	0 1 1 0	0 0 1 0
4	0 1 1 1	0 1 1 0
5	1 0 0 0	1 1 1 0
6	1 0 0 1	1 1 1 1
7	1 0 1 0	1 1 0 1
8	1 0 1 1	1 1 0 0
9	1 1 0 0	1 0 0 0

Bien que non pondéré, le code de Stibitz, ou « excédant 3 », est très intéressant parce qu'il est *autocomplémentaire* et que les nombres successifs sont dans un ordre binaire; c'est-à-dire que chaque nombre, jusqu'à 1 1 0 0 (9), est obtenu en ajoutant 0 0 0 1 au nombre binaire précédent.

Cette particularité permet de faire correspondre aux additions décimales des additions effectuées dans le système binaire.

Lorsque l'addition des deux chiffres binaires de gauche ne fait pas apparaître de retenue, on obtient le résultat, qui est inférieur à « 10 » décimal, en retranchant « $0\ 0\ 1\ 1_2$ » du nombre binaire obtenu. S'il apparaît une retenue, c'est que la somme dépasse « 10 » décimal, et l'on obtient le chiffre décimal qui excède « 10 » sous forme binaire en lui ajoutant « 0011_2 ».

— *Exemples :*

		4	0 1 1 1
		+ 3	+ 0 1 1 0
— pas de retenue	⟶		1 1 0 1
d'où soustraction	⟶		− 0 0 1 1
		= 7	1 0 1 0
		8	1 0 1 1
		+ 7	+ 1 0 1 0
— retenue	⟶		1 ∣ 0 1 0 1
d'où addition	⟶		+ 0 0 1 1
		= 5	1 0 0 0

Ces exemples suffisent à montrer l'intérêt du code de Stibitz. Quant aux codes « Gray », ce sont des codes à distance unité qui sont généralement utilisés lorsque l'on veut que le passage d'un nombre au suivant se limite au changement de valeur d'un seul chiffre. Cela se traduit par la suppression des inconvénients qui résultent, en pratique, de la non simultanéité de variation des chiffres binaires qui sont sensés changer de valeur en même temps.

Il est à noter qu'un code « Gray » n'est pas nécessairement décimal et peut être associé aux chiffres d'une base de numération quelconque, pourvu que cette base soit paire pour pouvoir revenir à zéro par modification d'un seul chiffre binaire.

Un code « Gray » se définit sans difficulté à l'aide du diagramme de « Karnaugh ». Il suffit que les nombres binaires suivent un ordre qui correspond à des combinaisons successives adjacentes.

— *Exemple :*

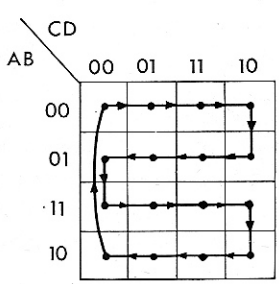


FIG. 5.5

En suivant l'ordre de succession indiqué par le diagramme de Karnaugh ci-dessus, on obtient un code binaire hexadécimal réfléchi qui est un code Gray.

	A	B	C	D
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	0
4	0	1	1	0
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	0

	A	B	C	D
8	1	1	0	0
9	1	1	0	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	0
12	1	0	1	0
13	1	0	1	1
14	1	0	0	1
15	1	0	0	0

5.8. — ***Décodage***

Lorsqu'une fonction de transcodage développée se limite à des fonctions binaires constituées chacune d'un simple produit ou d'un simple produel des variables élémentaires, on l'appelle parfois «*fonction de décodage*».

Nous avons vu que l'utilisation de diodes permettait la réalisation pratique très simple d'une fonction « ET » ou d'une fonction « OU » sous réserve que le nombre des variables ne soit pas trop important et que ces variables soient disponibles sous leurs formes directe et complémentée. Une matrice à diodes constitue donc une solution peu onéreuse et particulièrement intéressante dans le cas pratique de réalisation d'une «*fonction de décodage*» numérique.

Nous pouvons (fig. 5.6), convenir de représenter par des cercles les connexions de diodes qui correspondent à une fonction produit « ET » :

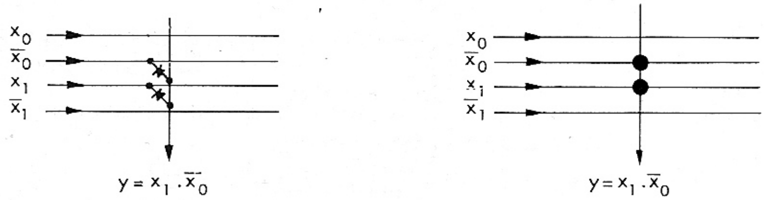


FIG. 5.6

Nous pouvons (fig. 5.7) représenter par des carrés les connexions qui correspondent à une fonction produel « OU » :

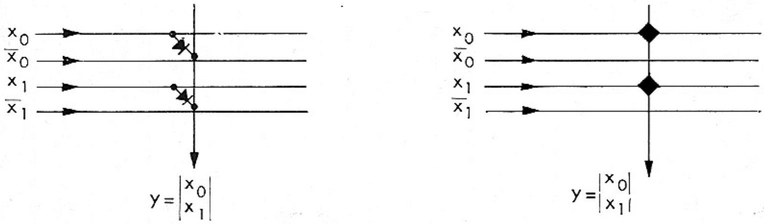


FIG. 5.7

Les huit produits qu'il est possible d'associer aux combinaisons de trois variables peuvent être obtenus à l'aide d'une matrice à diodes, conformément au schéma de la figure 5.8.

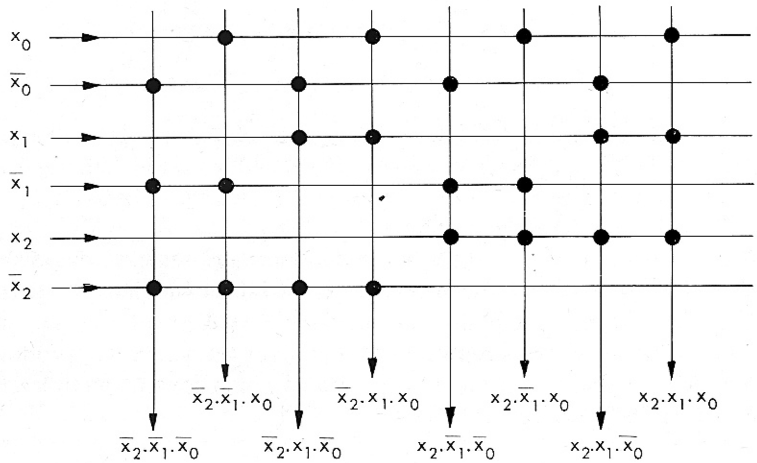


FIG. 5.8

5.81. — ***Exemple d'établissement d'une fonction de décodage.*** — On désire décoder une information enregistrée en binaire décimal (D.C.B.) suivant le code (8.4.2.1). On désigne par x_8, x_4, x_2, x_1 les chiffres binaires qui correspondent à une décade.

Il s'agit d'établir les expressions des fonctions binaires y_1, y_2, ..., y_k, ... y_9 relatives aux chiffres décimaux 1, 2, ,.., k, ..., 9.

La fonction « y_k » est égale à l'unité lorsque les valeurs de x_1, x_2, x_4, x_8, correspondent au chiffre décimal « k ».

Le problème ainsi posé permet d'établir la table de vérité qui fait apparaître les valeurs du vecteur Y_9 (y_9, y_8, ... y_2, y_1) qui correspondent respectivement aux valeurs du vecteur variable X_4 (x_8, x_4, x_2, x_1).

	x_8	x_4	x_2	x_1	y_9	y_8	y_7	y_6	y_5	y_4	y_3	y_2	y_1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
4	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
5	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
6	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
7	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	0	1	0	combinaisons disponibles								
11	1	0	1	1									
12	1	1	0	0									
13	1	1	0	1									
14	1	1	1	0									
15	1	1	1	1									

Dans le code binaire décimal (8.4.2.1), une remise à zéro est faite après le chiffre « 9 » ($1\,0\,0\,1_2$). *Les combinaisons 10, 11, 12, 13, 14 et 15* n'apparaissent en principe jamais; elles sont donc disponibles et rien ne s'oppose à les utiliser dans le but de simplifier le décodage.

Chaque fonction « y_k » égale à l'unité pour une seule valeur de « X_4 » peut s'exprimer par un simple produit des variables binaires.

Nous constatons cependant que les fonctions élémentaires y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 et y_7 peuvent être simplifiées si nous leur associons les produits qui correspondent respectivement à chacune des combinaisons disponibles 10, 11, 12, 13, 14 et 15. Ceci permet d'obtenir :

$$y_2 = \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1$$

$$y_3 = \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot x_1$$

$$y_4 = x_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1$$

$$y_5 = x_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1$$

$$y_6 = x_4 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1$$

$$y_7 = x_4 \cdot x_2 \cdot x_1$$

Les combinaisons 10, 12 et 14 peuvent être associées d'autre part à la combinaison « 8 » pour calculer « y_8 » :

$$y_8 = x_8 \cdot \bar{x}_1$$

Les combinaisons 11, 13 et 15 peuvent, de même, être associées à la combinaison « 9 » pour obtenir « y_9 » :

$$y_9 = x_8 \cdot x_1$$

Le décodage peut être réalisé à l'aide de fonctions « ET » à diodes en utilisant huit niveaux de tension correspondant respectivement à x_1, $\bar{x}_1$, x_2, $\bar{x}_2$, x_4, $\bar{x}_4$, x_8 et $\bar{x}_8$.

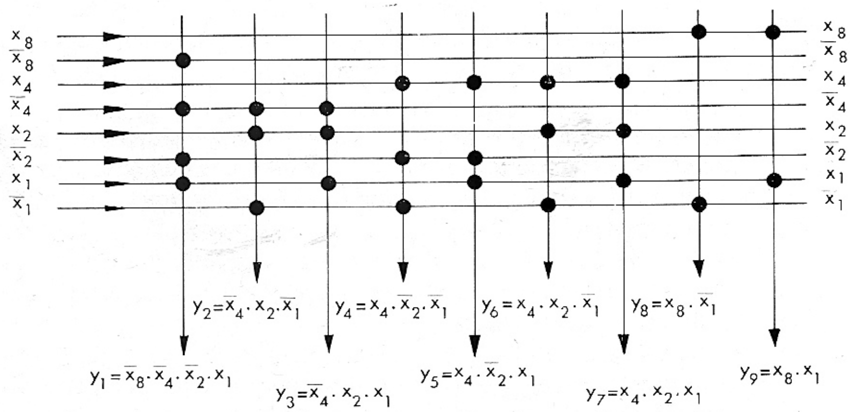


FIG. 5.9. — *Schéma de la matrice de décodage (D.C.B.)*

Le décodage peut également se faire à l'aide de fonctions « OU » à diodes et de transistors assurant la régénération et la complémentation des signaux. Les montages obtenus correspondent, en fait, à des circuits du genre « NI » (fig. 5.10).

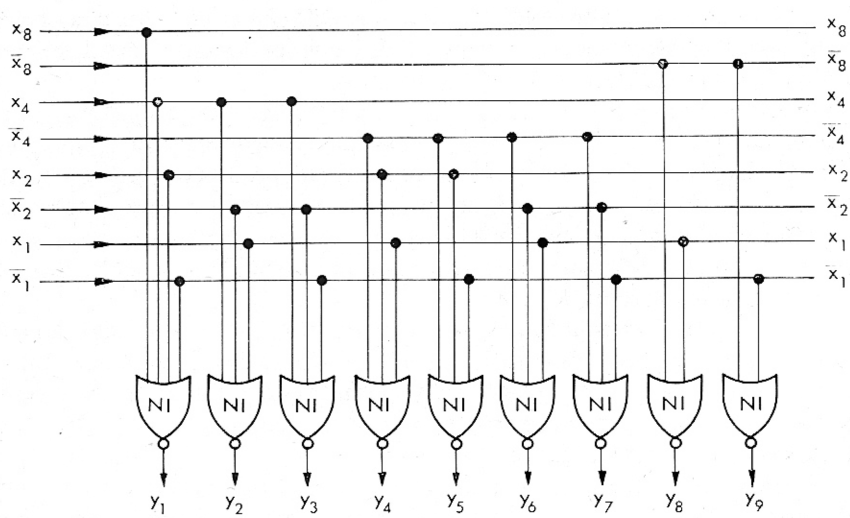


FIG. 5.10

5.9. — *Matrices de transcodage*

5.91. — ***Définitions préliminaires.*** — Nous avons convenu d'appeler fonction de décodage, toute fonction de transcodage $Y_p = F(X_n)$ dont chaque composante binaire $y_j \in E_{01}$, $\forall j = 1, 2, ..., p$, peut s'exprimer par un seul produit ou un seul produel des composantes $x_i \in E_{01}$ du vecteur variable « X_n », $\forall i = 1, 2, ..., n$. Nous dirons, par définition, que la fonction de décodage est du *genre «produit»* lorsque toutes les composantes du vecteur fonction sont des produits, et qu'elle est du *genre produel*, lorsque toutes les composantes du vecteur fonction sont des produels.

5.92. — ***Décomposition des formes de transcodage développées.*** — Les définitions précédentes étant admises, nous allons montrer que le transcodage est une opération qui possède la propriété de transitivité. Si nous considérons, en effet, les deux fonctions de transcodage $Y_p = F(Z_q)$ et $Z_q = G(X_n)$, nous pouvons, en mettant « Z_q » sous forme développée, remplacer dans la fonction « Y_p » chaque composante $z_i \in E_{01}$ par son expression binaire en fonction des composantes du vecteur « X_n ».

Nous pouvons ainsi écrire, $Y_p = F[G(X_n)] = \Psi(X_n)$.

La fonction obtenue $Y_p = \Psi(X_n)$ est également une fonction de transcodage. Ce qui démontre la propriété de transitivité.

Si donc « Y_p » est transcodée de « Z_q », et « Z_q » transcodée de « X_n », alors « Y_p » est transcodée de « X_n ».

Il est possible, en conséquence, et de nombreuses manières différentes, de décomposer une fonction de transcodage en deux ou plusieurs autres fonctions intermédiaires qui seraient aussi des fonctions de transcodage. Parmi les possibilités offertes, il en est deux, particulières et remarquables, qui ne font intervenir que deux fonctions de décodage différentes en genre et associées en cascade. L'existence des deux possibilités de choix des décodages résulte de la propriété de dualité des fonctions binaires.

Nous savons, en effet, que chaque composante binaire $y_i \in E_{01}$ d'un vecteur fonction de transcodage « Y_p » peut, d'une façon générale, s'exprimer sous forme développée, soit par un produel de produits (première forme canonique), soit par un produit de produels (deuxième forme canonique), des composantes du vecteur variable « X_n ». Dans le premier cas, chaque produit en facteur dual correspond à une combinaison, et une seule, associée à une valeur du vecteur « X_n ».

Si nous considérons la fonction intermédiaire $Z_q = G(X_n)$, dans laquelle chaque fonction composante $z_i \in E_{01}$ est telle que $z_i = 1$ pour une valeur et une seule de $X_n = X_n^i$. Chaque composante « z_i » est alors un produit des variables binaires du vecteur « X_n » et la fonction $Z_q = G(X_n)$ est une fonction de *décodage* du genre «*produit*».

Chaque fonction binaire composante $y_j \in E_{01}$ du vecteur « Y_p », mise par exemple sous la première forme canonique, est un produel dans lequel chaque produit peut être remplacé par la fonction « z » correspondante.

« y_j » est donc un produel dont chaque facteur dual est une composante du vecteur « Z_q ».

La fonction $Y_p = F(Z_q)$ est donc, également, une fonction de *décodage*, mais du *genre produel*. En utilisant la deuxième forme canonique (produit de produels), nous aurions pu envisager la deuxième décomposition possible selon deux fonctions de décodage intermédiaires, la première étant cette fois du genre produel, et la seconde du genre produit.

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème. — *Toute fonction de transcodage peut être décomposée suivant deux fonctions de décodage intermédiaires. Il existe deux possibilités de décomposition, produit de produels ou produel de produits, qui dépendent de la forme canonique des expressions binaires respectives, choisies dans le développement des composantes du vecteur fonction.*

Ce théorème intéressant permet de conclure qu'il est possible de réaliser, en pratique, toute fonction de transcodage $Y_p = \Psi(X_n)$, en associant deux matrices de décodage $Z_q = G(X_n)$ et $Y_p = F(Z_q)$ de genres différents. *L'ensemble obtenu constitue une matrice de transcodage* (*).

Notons que le vecteur « Z_q » comprend, en principe $q = 2^n$ composantes. Lorsque toutes les valeurs du vecteur « X_n » sont utilisées, il faut $n \cdot 2^n$ diodes pour le décodage $Z_q = G(X_n)$, et $p \cdot 2^n$ diodes pour le décodage $Y_p = F(Z_q)$, dans le cas où chaque fonction binaire « y_i » et son complément $\bar{y}_i$ sont exprimés simultanément. Nous en déduisons un total de $(p + n) \cdot 2^n$ diodes pour des matrices en rectangle.

Ce nombre peut être réduit en variant les montages (pyramide ou losange). La réduction peut aussi résulter de la simplification des fonctions binaires qui interviennent dans le transcodage.

En fait, la décomposition qui mène aux matrices de transcodage ne correspond pas à une réalisation optimale. Son avantage est plutôt de fournir des solutions systématiques qui sont valables et applicables dans tous les cas.

5.93. — ***Exemple de matrice de transcodage.*** — Reprenons la fonction de transcodage qui correspond à l'addition binaire et développons-la sous forme de produits de produels.

$$\bar{r}_p = \left|\begin{array}{c} \bar{a}_p \\ \\ \bar{b}_p \end{array}\right| \begin{array}{c|c|} \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} \\ a_p & b_p \\ \bar{b}_p & \bar{a}_p \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} r_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} \\ \bar{a}_p & a_p & \bar{a}_p & \bar{a}_p \\ \bar{b}_p & \bar{b}_p & b_p & \bar{b}_p \\ \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} & \multicolumn{1}{c}{7} \end{array}$$

(*) Dans le langage des ordinateurs, les matrices de transcodage sont souvent désignées sous l'appellation impropre de « mémoires mortes ».

$$r_p = \begin{array}{|c|c|c|c|} r_{p-1} & r_{p-1} & r_{p-1} & \bar{r}_{p-1} \\ a_p & a_p & \bar{a}_p & a_p \\ b_p & \bar{b}_p & b_p & b_p \\ \hline \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{4} \end{array}$$

$$s_p = \begin{array}{|c|c|c|c|} r_{p-1} & r_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} \\ a_p & \bar{a}_p & a_p & \bar{a}_p \\ b_p & \bar{b}_p & \bar{b}_p & b_p \\ \hline \multicolumn{1}{c}{0} & \multicolumn{1}{c}{3} & \multicolumn{1}{c}{5} & \multicolumn{1}{c}{6} \end{array} \qquad \bar{s}_p = \begin{array}{|c|c|c|c|} r_{p-1} & r_{p-1} & \bar{r}_{p-1} & \bar{r}_{p-1} \\ a_p & \bar{a}_p & a_p & \bar{a}_p \\ \bar{b}_p & b_p & b_p & \bar{b}_p \\ \hline \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{2} & \multicolumn{1}{c}{4} & \multicolumn{1}{c}{7} \end{array}$$

Il existe au total $2^3 = 8$ produels différents qui sont, respectivement :

$$z_0 = \begin{vmatrix} r_{p-1} \\ a_p \\ b_p \end{vmatrix} \quad z_1 = \begin{vmatrix} r_{p-1} \\ a_p \\ \bar{b}_p \end{vmatrix} \quad z_2 = \begin{vmatrix} r_{p-1} \\ \bar{a}_p \\ b_p \end{vmatrix} \quad z_3 = \begin{vmatrix} r_{p-1} \\ \bar{a}_p \\ \bar{b}_p \end{vmatrix} \quad z_4 = \begin{vmatrix} \bar{r}_{p-1} \\ a_p \\ b_p \end{vmatrix}$$

$$z_5 = \begin{vmatrix} \bar{r}_{p-1} \\ a_p \\ \bar{b}_p \end{vmatrix} \quad z_6 = \begin{vmatrix} \bar{r}_{p-1} \\ \bar{a}_p \\ b_p \end{vmatrix} \quad z_7 = \begin{vmatrix} \bar{r}_{p-1} \\ \bar{a}_p \\ \bar{b}_p \end{vmatrix}$$

Ainsi se trouve définie la matrice de transcodage d'addition binaire de la figure 5.11.

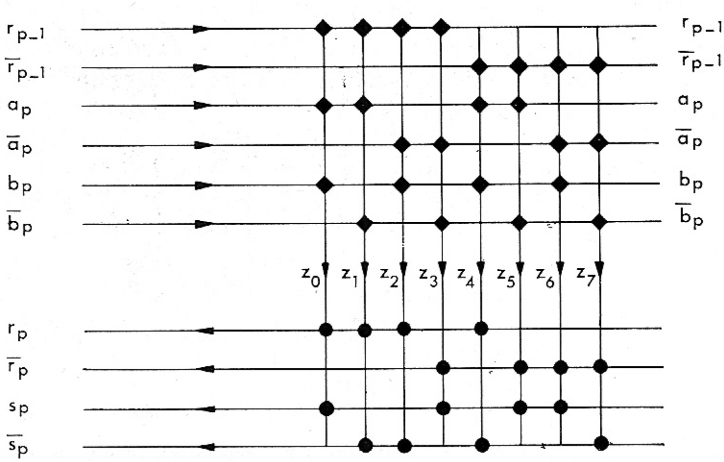


FIG. 5.11

Le nombre total de diodes utilisées est égal à : $(3 + 2) \cdot 2^3 = 40$.

N. B. — Pour éviter, en pratique, la réalisation de deux décodages différents (produits et produels), on utilise des transistors inverseurs intermédiaires, afin de se limiter à des fonctions « OU » (produels) plus faciles à réaliser à l'aide de diodes.

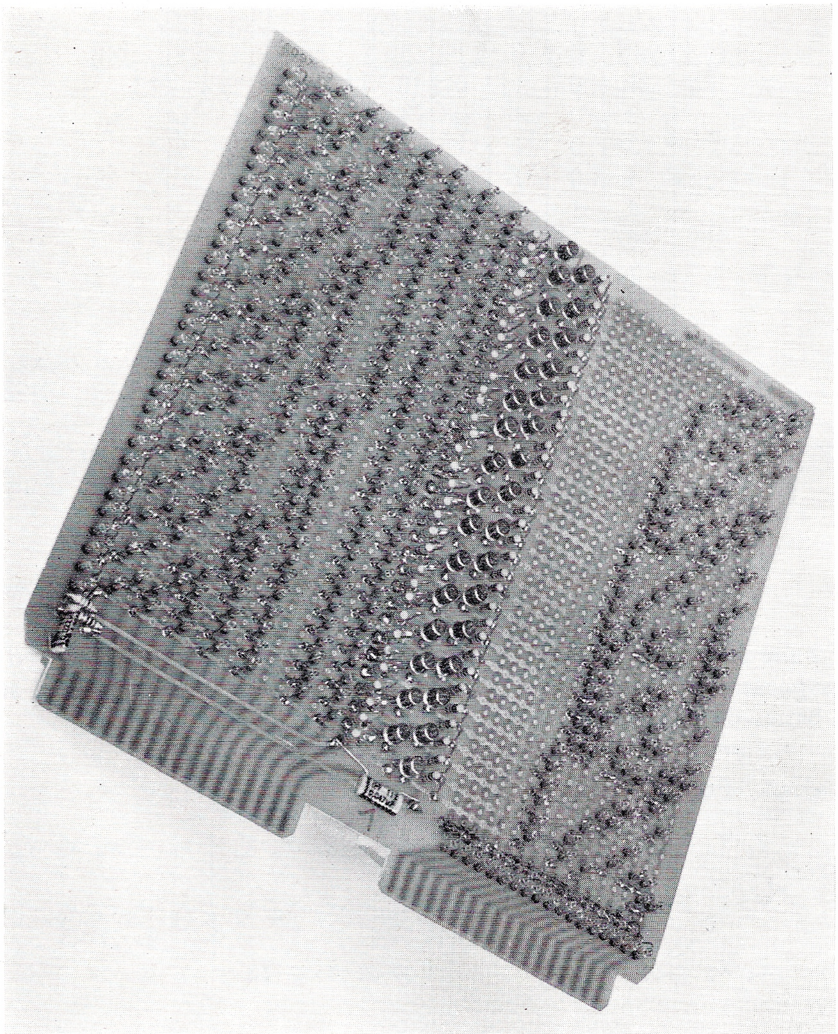


FIG. 5.12. — *Matrice de transcodage à diodes avec transistors de complémentation et de régénération.*

On notera l'ordre et la régularité de disposition des éléments distribués sur une plaquette à circuits imprimés.

5.10. — *Exercices d'application relatifs au chapitre V*

1° Etablir la fonction de décodage développée et simplifiée $Y_{10} = y_9, y_8, y_7, \ldots, y_2, y_1, y_o$, relative au code de Stibitz (code excédant « 3 »), dont les états sont rappelés dans la table de vérité suivante :

	x_4	x_3	x_2	x_1	Y_{10}
0	0	0	1	1	$y_o = 1$
1	0	1	0	0	$y_1 = 1$
2	0	1	0	1	$y_2 = 1$
3	0	1	1	0	$y_3 = 1$
4	0	1	1	1	$y_4 = 1$
5	1	0	0	0	$y_5 = 1$
6	1	0	0	1	$y_6 = 1$
7	1	0	1	0	$y_7 = 1$
8	1	0	1	1	$y_8 = 1$
9	1	1	0	0	$y_9 = 1$
10	1	1	0	1	combinaisons disponibles
11	1	1	1	0	
12	1	1	1	1	
13	0	0	0	0	
14	0	0	0	1	
15	0	0	1	0	

Faire le schéma de la matrice de décodage utilisant des circuits « NI » en supposant les variables x_1, $\bar{x}_1$, x_2, $\bar{x}_2$, x_3, $\bar{x}_3$, x_4, $\bar{x}_4$, disponibles sur des barres de distribution omnibus.

Réponses : Forme développée du décodage :

$y_o = \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_3$	$y_3 = \bar{x}_4 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1$	$y_5 = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1$	$y_8 = x_4 \cdot x_2 \cdot x_1$
$y_1 = \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_1$	$y_4 = x_3 \cdot x_2 \cdot x_1$	$y_6 = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1$	$y_9 = x_4 \cdot x_3$
$y_2 = \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_1$		$y_7 = \bar{x}_3 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_1$	

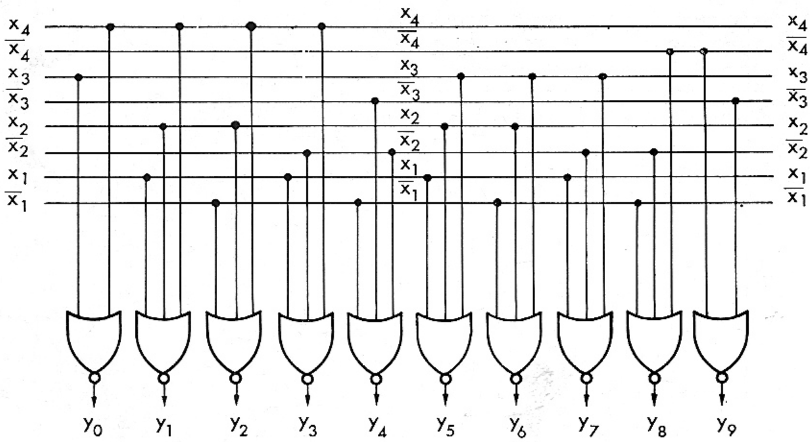


FIG. 5.13. — *Matrice de décodage utilisant des circuits « NI »*

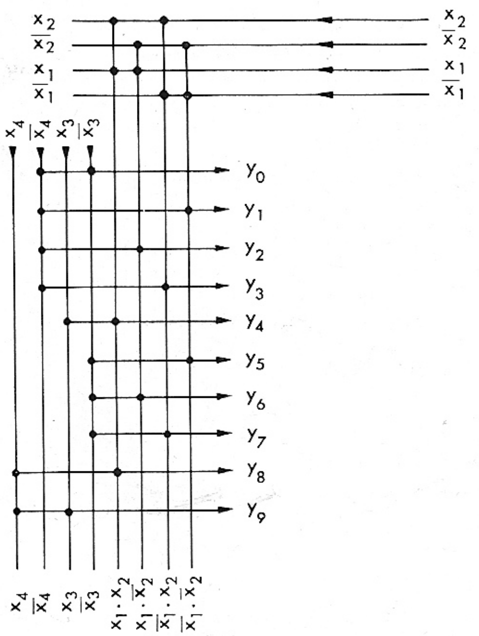
2° Ecrire la fonction de décodage du code de « Stibitz » précédent sous forme maillée en faisant apparaître les groupements respectifs, (y_o, y_4, y_8) – (y_1, y_5, y_9) – (y_2, y_6) et (y_3, y_7). En déduire une matrice de décodage à diodes, montées en fonction « ET », en supposant que les variables directes et complémentées sont disponibles sur des barres omnibus.

Réponses :

$$\bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 - = y_o \qquad\qquad x_3 \cdot x_4 - = y_9$$

$$x_1 \cdot x_2 - \begin{cases} x_3 - = y_4 \\ x_4 - = y_8 \end{cases} \qquad\qquad \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 - \begin{cases} \bar{x}_3 - = y_5 \\ \bar{x}_4 - = y_1 \end{cases}$$

$$x_1 \cdot \bar{x}_2 - \begin{cases} \bar{x}_4 - = y_2 \\ \bar{x}_3 - = y_6 \end{cases} \qquad\qquad \bar{x}_1 \cdot x_2 - \begin{cases} \bar{x}_4 - = y_3 \\ \bar{x}_3 - = y_7 \end{cases}$$



Cette matrice comprendra 28 diodes.

FIG. 5.14. — *Matrice de décodage à diodes montées en fonctions « ET »*

3° Etablir respectivement les fonctions simplifiées de transcodage $Y_4 = f(X_4)$ et $X_4 = \varphi(Y_4)$ qui permettent le passage d'un code de Stibitz à un code décimal codé binaire, et vice-versa, selon la correspondance établie par les tableaux ci-après, et en utilisant au mieux les combinaisons disponibles.

x_4	x_3	x_2	x_1		y_4	y_3	y_2	y_1
0	0	1	1	— 0 —	0	0	0	0
0	1	0	0	— 1 —	0	0	0	1
0	1	0	1	— 2 —	0	0	1	0
0	1	1	0	— 3 —	0	0	1	1
0	1	1	1	— 4 —	0	1	0	0
1	0	0	0	— 5 —	0	1	0	1
1	0	0	1	— 6 —	0	1	1	0
1	0	1	0	— 7 —	0	1	1	1
1	0	1	1	— 8 —	1	0	0	0
1	1	0	0	— 9 —	1	0	0	1
1	1	0	1		1	0	1	0
1	1	1	0		1	0	1	1
1	1	1	1	combinaisons	1	1	0	0
0	0	0	0	disponibles	1	1	0	1
0	0	0	1		1	1	1	0
0	0	1	0		1	1	1	1

Code de Stibitz — Code décimal codé binaire

— Montrer que la première fonction de transcodage peut être réalisée à l'aide de portes « NI » à deux entrées quand on l'écrit sous forme paramétrique en posant $a = x_1 \cdot x_2$.

— Montrer, de même, que la seconde fonction peut être réalisée à l'aide de portes « ON » à deux entrées, en posant $b = \left|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right|$. On supposera les variables disponibles sous leurs deux formes, directe et complémentée.

Réponses :

fonction Y_4

$$y_1 = \bar{x}_1$$

$$y_2 = \left|\begin{array}{c|c} \bar{x}_2 & x_1 \\ \bar{x}_1 & x_2 \end{array}\right|$$

$$y_3 = \left|\begin{array}{c|c} x_3 & x_1 \cdot x_2 \\ \bar{x}_2 & \\ & \bar{x}_3 \\ \bar{x}_1 & \end{array}\right|$$

$$y_4 = x_4 \left|\begin{array}{c} x_3 \\ x_1 \cdot x_2 \end{array}\right|$$

— *forme paramétrique*

$$a = x_1 \cdot x_2$$

$$y_1 = \bar{x}_1 \qquad y_3 = \left|\begin{array}{c|c} x_3 & a \\ \bar{a} & \bar{x}_3 \end{array}\right|$$

$$y_2 = \bar{a} \left|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array}\right| \qquad y_4 = x_4 \left|\begin{array}{c} a \\ x_3 \end{array}\right|$$

fonction X_4

$$x_1 = \bar{y}_1$$

$$x_2 = \left|\begin{array}{c} \bar{y}_2 \cdot \bar{y}_1 \\ y_2 \cdot y_1 \end{array}\right|$$

$$x_3 = \left|\begin{array}{c} y_3 \cdot \bar{y}_2 \cdot \bar{y}_1 \\ \begin{array}{c|c} y_1 & \\ & \bar{y}_3 \\ y_2 & \end{array} \end{array}\right|$$

$$x_4 = \left|\begin{array}{c} y_4 \cdot \bar{y}_3 \\ \begin{array}{c|c} & y_1 \\ y_3 & \\ & y_2 \end{array} \end{array}\right|$$

forme paramétrique

$$b = \left|\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right| \qquad x_3 = \left|\begin{array}{c} y_3 \cdot \bar{b} \\ b \cdot \bar{y}_3 \end{array}\right|$$

$$x_1 = \bar{y}_1$$

$$x_2 = \left|\begin{array}{c} \bar{b} \\ y_1 \cdot y_2 \end{array}\right| \qquad x_4 = \left|\begin{array}{c} y_4 \cdot \bar{y}_3 \\ y_3 \cdot b \end{array}\right|$$

4° On veut réaliser, sous forme itérative, la fonction de parité « y_n » de « n » variables binaires x_n, x_{n-1}, ..., x_2, x_1, telle que $y_n = 0$ lorsque les variables qui prennent la valeur « 1 » sont en nombre pair et $y_n = 1$ lorsque ce nombre est impair. (« 0 » est considéré comme un chiffre pair).

Etablir la relation de récurrence exprimant « y_n » en fonction de « y_{n-1} » et « x_n ». Faire le schéma de la fonction itérative à l'aide de quatre circuits « ON » en supposant que seules les valeurs directes de « y_{n-1} » et de « x_n » sont disponibles.

Réponses :

Relation de récurrence

$$y_n = \left| \begin{array}{c|c} \bar{x}_n & y_{n-1} \\ \bar{y}_{n-1} & x_n \end{array} \right|$$

soit :

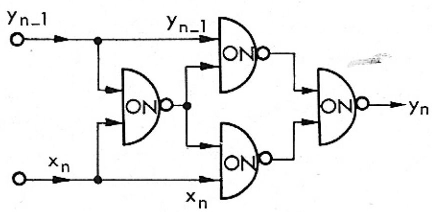


FIG. 5.15

$$y_n = \left| \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} \bar{x}_n \\ \bar{y}_{n-1} \end{array} \right| y_{n-1} \\ \left| \begin{array}{c} \bar{x}_n \\ \bar{y}_{n-1} \end{array} \right| x_n \end{array} \right|$$

5° Un système de comptage à base trois comprend deux chiffres binaires φ_2 et φ_1 qui prennent les valeurs successives (0, 0), (0, 1) et (1, 1). La combinaison (1, 0) n'apparaît jamais. Exprimer la fonction de décodage Y_3 (y_2, y_1, y_o) sous forme paramétrique et maillée en prenant y_2 comme paramètre et en posant $y_o = 1$ pour la combinaison ($\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = 0$), $y_1 = 1$ pour ($\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = 1$) et $y_2 = 1$ pour ($\varphi_2 = 1$, $\varphi_1 = 1$).

Réponse :

$$- \left| \begin{array}{l} \varphi_2 = y_2 \\ - \bar{y}_2 \left| \begin{array}{l} \bar{\varphi}_1 = y_o \\ \varphi_1 = y_1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

6° On donne les logarithmes à base deux figurant dans la liste suivante :

$$\begin{aligned}
\log_2 \ 3 &= 1{,}585_{10}\\
\log_2 \ 5 &= 2{,}322_{10}\\
\log_2 \ 7 &= 2{,}807_{10}\\
\log_2 \ 11 &= 3{,}459_{10}\\
\log_2 \ 13 &= 3{,}700_{10}
\end{aligned}$$

Ecrire dans le système binaire et avec la meilleure approximation, la table de vérité de transcodage correspondant à $Y = \log_2 X$, dans laquelle $Y = y_2\, y_1,\, z_1\, z_2\, z_3\, z_4$ et $X = x_8\, x_4\, x_2\, x_1$ (15 combinaisons, exceptée la combinaison $X = 0$). Exprimer, sous forme développée, la fonction de transcodage qui en résulte.

Réponses :

	x_8	x_4	x_2	x_1	y_2	y_1	z_1	z_2	z_3	z_4
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
6	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1
7	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1
8	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1
13	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1
14	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

$$y_2 = \left|\begin{array}{c} x_8 \\ x_4 \\ \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \end{array}\right| , \qquad y_1 = \left|\begin{array}{c} x_8 \\ \bar{x}_4 \cdot x_2 \\ \bar{x}_4 \cdot \bar{x}_1 \end{array}\right|$$

$$z_1 = \left|\begin{array}{c} x_8 \cdot x_4 \\ x_4 \cdot x_2 \\ \bar{x}_8 \cdot x_2 \cdot x_1 \end{array}\right| , \qquad z_2 = \left|\begin{array}{c} x_8 \cdot x_2 \\ \bar{x}_8 \cdot x_4 \cdot x_1 \end{array}\right| , \qquad z_3 = x_8 \cdot x_1$$

$$z_4 = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c} \bar{x}_8 & x_8 & x_8 & x_8 & \bar{x}_8 \\ \bar{x}_4 & x_4 & x_4 & \bar{x}_4 & x_4 \\ \bar{x}_2 & x_2 & \bar{x}_2 & x_2 & x_2 \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_1 & x_1 & x_1 & \end{array} \right|$$

7° On donne une grille comprenant 15 cases, repérée chacune par un nombre décimal, et distribuées comme l'indique le diagramme suivant :

8	11	9
5	10	1
7	14	3
4	6	2
12	15	13

Ces cases correspondent à celles du diagramme de Karnaugh suivant selon les mêmes chiffres décimaux relatifs aux combinaisons des quatre variables binaires a, b, c et d.

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

On projette sur la grille précédente les chiffres 0, 1 et les signes « + » et « = » suivant les distributions respectives indiquées par la figure 5.16.

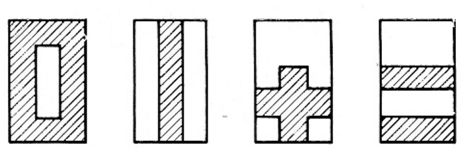


FIG. 5.16

Calculer, sous forme développée, la fonction de transcodage Y (y_o, y_1, $y_{(+)}$, $y_{(=)}$) = F [X (a, b, c, d)] telle que les fonctions binaires élémentaires

« y » soient égales à l'unité pour les combinaisons qui correspondent aux cases hachurées.

Montrer que l'on peut écrire les fonctions binaires « y » sous forme de produits de produels admettant pour facteurs duals les variables directes a, q, d (exceptée $\bar{c}$) et les produits $\bar{a} \cdot \bar{b}$ et $\bar{a} \cdot \bar{d}$.

(*N. B.* — La combinaison X = 0 est disponible).

Réponses :

$$y_o = \left| \begin{array}{c|c} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{c} \\ d & d \end{array} \right| \qquad y_1 = \left| \begin{array}{c} a \cdot c \\ b \cdot c \cdot \bar{d} \end{array} \right| = c \left| \begin{array}{c|c} a & a \\ b & \bar{d} \end{array} \right|$$

$$y_{(+)} = \left| \begin{array}{c} a \cdot b \cdot c \\ \bar{a} \cdot c \cdot \bar{d} \\ \bar{a} \cdot b \cdot \bar{d} \end{array} \right| \qquad y_{(=)} = \left| \begin{array}{c} a \cdot b \\ \bar{a} \cdot c \cdot d \end{array} \right|$$

$$y_o = \left| \begin{array}{c} \bar{a} \cdot \bar{b} \\ \bar{c} \\ d \end{array} \right| \qquad y_1 = c \left| \begin{array}{c|c} a & a \\ b & \bar{a} \cdot \bar{d} \end{array} \right| \qquad y_{(+)} = \left| \begin{array}{c|c|c|c} a & b & c & b \\ \bar{a} \cdot \bar{d} & \bar{a} \cdot \bar{b} & \bar{a} \cdot \bar{d} & c \end{array} \right|$$

$$y_{(=)} = \left| \begin{array}{c|c|c} a & a & \bar{a} \cdot \bar{b} \\ c & d & b \end{array} \right|$$

8° On donne la table de vérité de transcodage complète ci-dessous :

a	b	c	y_2	y_1
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

Il existe un facteur commun aux fonctions binaires y_1 et y_2. Quel est ce facteur commun ?

Exprimer les fonctions y_1 et y_2 en faisant apparaître le facteur commun calculé, et réaliser le schéma de transcodage à l'aide de quatre circuits « NI ».

Réponses :

$$\text{facteur commun : } f = \left| \begin{array}{c} a \\ \\ b \end{array} \right|$$

$$y_1 = \left| \begin{array}{c|c} a & a \\ & \\ b & c \end{array} \right|, \qquad y_2 = \left| \begin{array}{c} a \\ \\ b \end{array} \right| \cdot \bar{a} \cdot \bar{c}$$

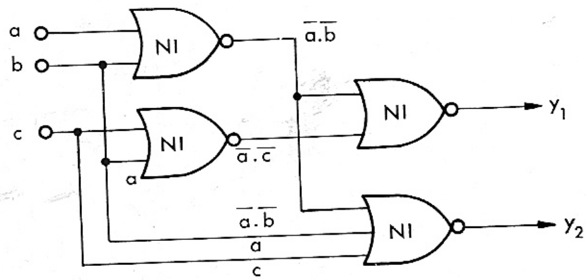


FIG. 5.17

INDEX ALPHABÉTIQUE

E

F

G

I

K

L

M

N

O

P

TABLE DES MATIÈRES

MASSON et Cie, Editeurs
120, Bd St-Germain, Paris VI
Dépôt légal : 1er trimestre 1970
T. 326 5611

Imprimé en Belgique

Imprimeries
de la Maison d'édition s.c.
96, avenue de Philippeville
Marcinelle