Chapitre 1

La logique des propositions inanalysées

1.1 Les tables de vérité

Partons des trois phrases suivantes :

1. Les vers luisants émettent de la lumière ;
2. 9 est un nombre premier ;
3. Les petits bateaux ont-ils des jambes ?

La première est vraie, la deuxième est fausse, quant à la troisième elle pose une question et elle n'est ni vraie, ni fausse. La logique dont nous allons traiter concerne les seules propositions dont il y a un sens à dire qu'elles sont vraies ou fausses.

D'une façon plus précise, nous appellerons *proposition* toute expression susceptible de prendre une et seulement une des deux valeurs de vérité suivantes : le vrai que nous noterons 1, le faux que nous noterons 0. Ainsi si p représente la phrase (1) ci-dessus et q la phrase (2), on pourra écrire :

$val(p) = 1$soit : « la valeur (de vérité) de la proposition p est 1 » ou encore « p est vraie ».

$val(q) = 0$soit : « la valeur (de vérité) de la proposition q est 0 » ou encore « q est fausse ».

Remarque

La détermination de la valeur actuelle d'une proposition n'est pas une question de logique. Ainsi c'est une affaire de biologie que de vérifier si $val(p) = 1$ et c'est à l'arithmétique de montrer que $val(q) = 0$. Cela signifie que la logique se contente de savoir que les objets dont elle s'occupe sous le nom de proposition ont l'une ou l'autre des valeurs 1 ou 0.

Soit alors $V = df\ \{1,\ 0\}$ l'ensemble des *valeurs de vérité* et soit Π l'ensemble des propositions au sens ci-dessus. Dire que si P est un élément quelconque de Π, P a une valeur de vérité, c'est dire qu'il existe une application, notée val, de Π vers V. On a donc : $val : \Pi \to V$.

La notion mathématique d'application entraîne les deux conséquences suivantes :

1. Tout élément de Π, donc toute proposition, a une valeur dans$V$.
2. Un élément de Π, donc une proposition, n'a qu'une seule valeur.

Les éléments de Π peuvent être aussi bien des propositions atomiques que des propositions moléculaires (I, p. 7).

Le problème qui va nous occuper est alors le suivant : Si P est une proposition moléculaire composée des atomes $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$, déterminer la valeur de vérité de P. Résoudre ce problème, c'est *évaluer* P ou encore calculer l'*évaluation* de P.

Pour évaluer P, il faut se souvenir que P est composée de $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$, à l'aide des *foncteurs* propositionnels, que nous appellerons aussi indifféremment des *opérateurs.* Ainsi la proposition moléculaire $P = df\ \sim p \supset (p \vee q)$ est composée des atomes p et q par les opérateurs de négation ($\sim$), de la conditionnelle ($\supset$) et de la disjonction non exclusive ($\vee$). Nous savons que chacun des atomes a l'une des valeurs 1 ou 0. Il sera donc possible d'évaluer P si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. La valeur de P ne dépend que des valeurs de ses atomes.
2. On connaît la façon dont les foncteurs opèrent sur les valeurs de leurs arguments.

La première condition est tout simplement postulée. Quant à la seconde, elle revient à donner une définition de chacun des opérateurs ou foncteurs propositionnels.

Remarque

Postuler que la valeur d'une proposition moléculaire ne dépend que de celles de ses atomes, revient à adopter le point de vue qu'on appelle *extensionnel*. Il s'agit là d'une décision limitative. Supposons en effet que P contienne, en particulier, l'atome p. Si l'on trouve un autre atome q qui ait la valeur 1 en même temps que p et la valeur 0 en même temps que p, on devrait pouvoir substituer q à p dans P sans modifier la valeur de P. Or ceci n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple suivant :

	p	$=df$	l'eau de mer contient du chlorure de sodium ;
Soit	q	$=df$	l'eau de mer contient du sel ;
	P	$=df$	Aristote ne savait pas que l'eau de mer contient du chlorure de sodium.

La substitution de q à p conduit à « Aristote ne savait pas que l'eau de mer contient du sel ». On voit que la valeur de vérité de cette proposition P ne dépend pas uniquement de celle de p. La logique classique des propositions est incapable d'en traiter.

Commençons par définir l'*opérateur de négation*. Il est naturel de poser ce qui suit :

Si $val(p) = 1$ alors $val(\sim p) = 0$
Si $val(p) = 0$ alors $val(\sim p) = 1$

Il est commode de présenter les choses sous la forme d'une tabelle :

$val(p)$	$val(\sim p)$
1	0
0	1

ou plus simplement encore :

p	$\sim p$
1	0
0	1

Une telle tabelle, dite aussi *table de vérité*, définit l'opération de négation et permet de calculer les valeurs des propositions niées.

Exemple : calcul de la valeur de $\sim\sim p$.

Présentation verticale des calculs

$\sim$	$\sim$	p
1	0	1
0	1	0

Présentation horizontale des calculs

p	1	0
$\sim p$	0	1
$\sim\sim p$	1	0

$\sim\sim p$ et p ont donc toujours mêmes valeurs de vérité.

Passons maintenant aux opérateurs binaires dont nous avons étudié la manipulation dans le Fascicule I. Nous allons, comme nous l'avons déjà fait, nous appuyer sur l'usage. Il faut toutefois souligner deux faits méthodologiquement importants.

1. L'usage est une notion peu précise en ce sens qu'une même expression, comme *ou* par exemple, s'utilise en fait de plusieurs façons. Cela revient à dire que nous serons conduits à choisir certains aspects et à en négliger d'autres.
2. Cet appel à l'usage n'est qu'un procédé heuristique. Cela veut dire que, une fois une table de vérité posée, l'opérateur doit être considéré comme entièrement défini par elle et qu'il ne dépend plus en rien de son sens naïf.

Les foncteurs dont nous allons traiter opèrent donc sur deux arguments. Cela revient à dire que, appliqués à deux propositions, ils engendrent une nouvelle proposition. Chacun des atomes peut être vrai ou faux indépendamment de l'autre. Nous aurons donc quatre possibilités à envisager et nous les considérerons toujours dans l'ordre canonique suivant :

(1) $val(p) = val(q) = 1$ (2) $val(p) = 1$, $val(q) = 0$
(2) $val(p) = 0$, $val(q) = 1$ (4) $val(p) = val(q) = 0$

Opérateur de conjonction $\wedge$ (I.1.4)

Nous admettrons que $p \wedge q$ n'est vraie que si p et q sont toutes deux vraies. On est conduit ainsi à la table suivante, que nous présentons de trois façons différentes. Par la suite nous ne retiendrons que la troisième présentation.

p	$\wedge$	q
0	0	0
0	0	1
1	0	0
1	1	1

$$\begin{array}{r|cc} & \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\quad\quad}^{q}} \\ \wedge & 1 & 0 \\ \hline p\begin{cases}1\\0\end{cases} & \begin{matrix}1\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\end{matrix}\end{array}$$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Il est facile de s'assurer que les propositions $p \wedge q$ et $q \wedge p$ ont mêmes valeurs de vérité.

Opérateur de disjonction non-exclusive $\vee$ (1.1.8)

Nous poserons : $p \vee q$ n'est fausse que si p et q sont fausses, ce qui conduit à la table suivante :

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Les propositions : $p \vee q$ et $q \vee p$ ont mêmes valeurs de vérité. De plus, ainsi qu'on peut le constater, il existe une transformation simple qui permet de passer de $\vee$ à $\wedge$ et inversement. Il suffit de lire chaque table de bas en haut, de remplacer les 1 par des 0 et les 0. par des 1. Cette transformation que nous retrouverons plus loin (1.5)s'appelle la *transformation duale.*

Opérateur de disjonction exclusive $\veebar$

Si, comme c'est le plus souvent le cas, la conjonction *ou* veut donner le choix entre les deux propositions qu'elle relie, il convient de ne pas considérer comme vraie la combinaison $val(p) = val(q) = 1$.

On obtient donc la table :

p	q	$p \veebar q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

On a encore $val(p \veebar q)$=$val(p \veebar q)$.

Opérateur conditionnel $\supset$ *(I. 1. 3)*

Nous allons partir de l'exemple suivant :

« Si n est divisible par 6, n est pair ». On a donc une proposition de la forme $p \supset q$ avec p=*df* n est divisible par 6 et q =*df* n est pair.

Il est clair que si $val(p) = val(q) = 1$ alors $val(p \supset q) = 1$. C'est là une partie de l'information que communique la proposition conditionnelle. L'autre partie est qu'il ne se peut pas que n soit divisible par 6 sans être pair. On a donc que : si $val(p) = 1$ et $val(q) = 0$ alors $val(p \supset q) = 0$. Mais que se passe-t-il dans le cas où n n'est pas divisible par 6 ? On voit qu'il peut également arriver que n soit pair, $val(q) = 1$ ou impair, $val(q) = 0$. La conditionnelle $p \supset q$ ne se prononce pas sur ces éventualités. Nous poserons en conséquence la table suivante :

p	q	$p \supset q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Il importe de noter que cette façon de traiter l'opérateur conditionnel constitue un modèle souvent inadéquat de *si... alors*. Sans même revenir sur les usages du genre « si j'avais su, je ne serais pas venu », il arrive très souvent que la signification des propositions en jeu exclut la possibilité d'avoir$p \supset q$ vraie lorsque p est fausse et q vraie. Ainsi la proposition « si vous passez me voir, nous boirons une bouteille ensemble » ne peut pas être vraie lorsque « vous passez me voir » est fausse. Il s'agit-là d'une autre façon de mettre en évidence l'aspect extensionnel de la logique, qui ne traite que de la valeur de vérité des propositions, à l'exclusion de leur signification.

Opérateur biconditionnel $\equiv$ (I. 1. 5)

C'est cet opérateur qui constituerait un meilleur modèle de l'exemple qui précède. Il traduit donc les situations dans lesquelles si on ap on a q et si on n'a pas p, on n'a pas$q$. Il est défini par la table suivante :

p	q	$p \equiv q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

On remarquera qu'il est très simple de passer de la table de $\veebar$ à celle de $\equiv$ et inversement : il suffit d'y remplacer les 1 par des 0 et les 0 par des 1. Cette transformation est celle de négation. Il est enfin facile de voir que $val(p \equiv q) = val(q \equiv p)$.

1.2 Les tautologies

Les tables précédentes permettent d'évaluer n'importe quelle proposition moléculaire P dont les atomes sont composés par les opérateurs $\sim$, $\wedge$, $\vee$,$\veebar$, $\supset$ et $\equiv$ que nous venons de définir. Si P contient deux atomes, il y aura $2^2 = 4$ éventualités à examiner.

Exemple

P =*df* $p \supset (p \vee q)$

On a, en disposant les calculs en ligne :

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$\sim p$	0	0	1	1
$p \vee q$	1	1	1	0
$\sim p \supset (p \vee q)$	1	1	1	0

Si P contient trois atomes, on aura $2^3 = 8$ éventualités à étudier, ce que nous ferons en adoptant l'ordre canonique qui figure dans l'exemple suivant :

Exemple

$(p \vee q) \supset\sim (q \wedge m)$

p	1	1	1	1	0	0	0	0
q	1	1	0	0	1	1	0	0
m	1	0	1	0	1	0	1	0
$p \vee q$	1	1	1	1	1	1	0	0
$q \wedge m$	1	0	0	0	1	0	0	0
$\sim (q \wedge m)$	0	1	1	1	0	1	1	1
$(p \vee q) \supset\sim (q \wedge m)$	0	1	1	1	0	1	1	1

D'une façon générale, si P contient les$n$ atomes p_1, p_2, $\ldots$, p_n, il faudra envisager 2^n éventualités. Nous adopterons l'ordre canonique suivant. Les atomes étant ordonnés une fois pour toutes (pratiquement, on choisit l'ordre alphabétique), on écrit les suites :

p_1 : $\frac{2^n}{2}$ valeurs 1, suivies de $\frac{2^n}{2}$ valeurs 0 ;

p_2 : $\frac{2^n}{4}$ valeurs 1, suivies de $\frac{2^n}{4}$ valeurs 0, suivies de $\frac{2^n}{4}$ valeurs 1, suivies de $\frac{2^n}{4}$ valeurs 0 ;

p_3 : $\frac{2^n}{8}$ valeurs 1, suivies de $\frac{2^n}{8}$ valeurs 0, etc.

p_n : une suite alternée d e1 et de 0.

Les calculs deviennent assez rapidement fastidieux, mais ils n'offrent jamais de difficultés de principe et, à toute proposition composée de n atomes, on sait faire correspondre une suite ordonnée de2^n valeurs 1 et 0.

Exemples

à p	correspond la suite	1 0
à $\sim p$	la suite	0 1
à $p \wedge q$	la suite	1 0 0 0
à $(p \vee q) \supset \sim (q \wedge m)$	la suite	0 1 1 1 0 1 1 1

Remarque

L'introduction d'un ordre canonique permet de donner l'évaluation d'une proposition P sans préciser chaque fois à quelles valeurs des atomes correspondent les 1 et les 0 de P. Ainsi, pour$p \wedge q$ par exemple, on peut se contenter de donner le quadruple (1 0 0 0).

Répartissons les évaluations en trois catégories, selon (1) qu'il y figure des 1 et des 0 (2) qu'il n'y figure que des 1 et (3) qu'il n'y figure que des 0. Il existe des propositions qui correspondent à chacune de ces catégories. Toutes celles que nous venons de voir sont des exemples de la première. Comme le montrent les calculs suivants $p \vee \sim p$, $p \supset (q \supset p)$ sont des exemples de la deuxième et $p \vee \sim p$, $p \wedge \sim (p \vee q)$ des exemples de la troisième.

Calculs

$$p \vee \sim p$$

$$\begin{array}{r|cc} p & 1 & 0 \\ \sim p & 0 & 1 \\ \hline p \vee \sim p & 1 & 1 \end{array}$$

$$p \wedge \sim p$$

$$\begin{array}{r|cc} p & 1 & 0 \\ \sim p & 0 & 1 \\ \hline p \wedge \sim p & 0 & 0 \end{array}$$

$$p \supset (q \supset p)$$

$$\begin{array}{r|cccc} p & 1 & 1 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline q \supset p & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline p \supset (q \supset p) & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$p \wedge \sim (p \vee q)$$

$$\begin{array}{r|cccc} p & 1 & 1 & 0 & 0 \\ q & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline p \vee q & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline \sim (p \vee q) & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline p \supset (q \supset p) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Toute proposition dont l'évaluation ne contient que des 1 est une tautologie et toute proposition dont l'évaluation ne contient que des 0 est une contradiction. Il est clair que si P est une tautologie, $\sim P$ sera une contradiction et réciproquement. D'autre part, puisque une proposition atomique p prend soit la valeur 1 soit la valeur 0, seules des propositions moléculaires peuvent être des tautologies ou des contradictions. Si P est une tautologie, nous écrirons $\vdash P$.

Remarques

1. Affirmer, comme nous venons de le faire, qu'une proposition atomique, ne peut être ni une tautologie, ni une contradiction, c'est s'appuyer sur une décision propre au système logique construit et non pas constater un fait d'expérience. La proposition « les célibataires sont des gens mariés » est atomique, en ce sens qu'elle ne contient aucun des opérateurs précédents et elle exprime cependant une contradiction. Toutefois, on sait que, analysée dans la logique des prédicats, elle s'écrira :
   $(\forall x)\,(\sim ax \supset ax)$où ax =df x est marié et où être célibataire =df être non marié.
   Cette divergence repose sur le fait que « être une expression atomique » n'a pas le même sens dans la logique des propositions et dans celle des prédicats.
2. Nous avons utilisé le même signe $\vdash$ pour dire qu'une proposition était une tautologie et pour dire qu'elle était un théorème (I, p. 21). Il est possible, en prenant des exemples, de s'assurer que si P est un théorème alors P est une tautologie et réciproquement. Toutefois la pratique qui consiste à écrire dans les deux cas $\vdash P$ exigerait la démonstration d'un épithéorème. Une telle démonstration, si elle se voulait rigoureuse, sortirait du propos de cet ouvrage, mais nous y reviendrons cependant en (1.7).
3. Puisqu'une tautologie est vraie, quelles que soient les valeurs de ses atomes, on peut de nouveau dire qu'elle est « vraie dans tous les mondes possibles ». Elle ne fournit ainsi aucune information sur le monde lui-même.

Exemple

« Il y a des hommes sur la planète Mars ou il n'y a pas d'hommes sur la planète Mars », soit $p \vee q$, ne nous renseigne absolument pas sur la planète en question.

On dit volontiers pour cela que les tautologies sont vides de sens. En fait, elles expriment des lois logiques en explicitant la façon dont les opérateurs ont utilisés.

Il est de nouveau possible de définir les relations d'implication et d'équivalence entre propositions. Nous poserons encore :

$$\begin{array}{rclclcl} P \text{ implique } Q & =\text{df} & P \rightarrow Q & =\text{df} & \vdash P \supset Q & \text{(I, p. 26).} \\ P \text{ est équivalente à } Q & =\text{df} & P \leftrightarrow Q & =\text{df} & \vdash P \equiv Q & \text{(I, p. 27).} \end{array}$$

La relation d'équivalence permet d'énoncer les principales propriétés des opérateurs que nous avons introduits jusqu'ici. Pour les vérifier, il suffit de remplacer toute expression de la forme$P \leftrightarrow Q$ par $\vdash P \equiv Q$ et de s'assurer par le calcul que cette dernière proposition est bien une tautologie. Nous avons :

(0) $\sim\sim p \longleftrightarrow p$, *principe de la double négation*;

(1) les opérations $\wedge$, $\vee$, $\mathbb{W}$ et $\equiv$ *sont commutatives* :
$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$, $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$, $p \mathbb{W} q \leftrightarrow q \mathbb{W} p$, $p \equiv q \leftrightarrow q \equiv p$;

(2) Elles sont *associatives*
$(p \wedge q) \wedge m \leftrightarrow p \wedge (q \wedge m)$, $p \vee (q \vee m) \leftrightarrow (p \vee q) \vee m$
$(p \mathbb{W} q) \mathbb{W} m \leftrightarrow p \mathbb{W} (q \mathbb{W} m)$, $p \equiv (q \equiv m) \leftrightarrow (p \equiv q) \equiv m$;

(3) Les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont *idempotentes* :
$p \vee p \leftrightarrow p$, $p \wedge p \leftrightarrow p$;

(4) Les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont *distributives* l'une par rapport à l'autre :
$p \wedge (q \vee m) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge m)$
$p \vee (q \wedge m) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee m)$

L'opération $\supset$ ne jouit d'aucune des trois premières propriétés et l'opération $\equiv$ n'est pas idempotente : $p \equiv p$ est une tautologie.

Remarque

Une expression comme $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ n'est pas homogène. En signes p, q et $\wedge$ font partie du système que nous étudions. Mais le $\leftrightarrow$ est une abréviation de la langue de communication. Il sert à dire : « est équivalente à ». Ce fait nous a permis d'économiser les parenthèses où, pour éviter des confusions, il faudrait écrire $\vdash (p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ puisque $\equiv$ est aussi un signe du calcul, nous avons pu nous contenter d'écrire $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$. Nous utiliserons systématiquement cette pratique dans ce qui suit.

La relation d'équivalence permet aussi de montrer que les opérateurs définis par les tables qui précèdent ne sont pas indépendants les uns des autres. Ainsi on aura :

$$\begin{array}{lclclcl}
\vdash (p \wedge q) & \equiv & \sim(\sim p \vee \sim q) & \text{soit} & (p \wedge q) & \leftrightarrow & \sim(\sim p \vee \sim q) \\
\vdash (p \vee q) & \equiv & \sim(\sim p \wedge \sim q) & \text{soit} & (p \vee q) & \leftrightarrow & \sim(\sim p \wedge \sim q) \\
\vdash (p \mathbin{\vee\!\!\!\vee} q) & \equiv & ((p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)) & \text{soit} & (p \mathbin{\vee\!\!\!\vee} q) & \leftrightarrow & ((p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q))
\end{array}$$

Les deux premières équivalences correspondent aux lois de Morgan (I. p38). Assurons-nous de la troisième :

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$p \mathbin{\vee\!\!\!\vee} q$	0	1	1	0
$p \vee q$	1	1	1	0
$p \wedge q$	1	0	0	0
$\sim (p \wedge q)$	0	1	1	1
$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$	0	1	1	0
Proposition	1	1	1	1

On aura encore : $p \supset q \leftrightarrow \sim p \vee q \leftrightarrow \sim (p \wedge \sim q)$
et $p \equiv q \leftrightarrow (p \supset q) \wedge (q \supset p)$.

Introduisons enfin un nouvel opérateur $\mid$ tel que $p \mid q$ s'interprète comme « pas à la fois p et q ».

Cela conduit à poser la table :

p	q	$p \mid q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Il est facile de s'assurer que l'on a alors les équivalences suivantes :
$\sim p \leftrightarrow p \mid p \qquad p \vee q \leftrightarrow (p \mid p) \mid (q \mid q) \qquad p \wedge q \leftrightarrow (p \mid q) \mid (p \mid q)$.
Remarque

L'opérateur $\downarrow$dont l'évaluation est (0 0 0 1) conduit aux équivalences :

$\sim p \leftrightarrow p \downarrow p \qquad p \vee q \leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \qquad p \wedge q \leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

On voit ainsi qu'un seul opérateur, soit $|$, soit $\downarrow$, permet de définir tous les autres par des équivalences.

Bien que représentant des lois logiques, les tautologies ne permettent pas d'effectuer des déductions. Toutefois, si une déduction est effectuée, elles permettent de s'assurer de sa correction.

Exemple

« Ceux qui veulent la paix préparent la guerre. Vous ne préparez pas la guerre, donc vous ne voulez pas la paix ».

Nous poserons :

p	$=df$	vouloir la paix
q	$=df$	préparer la guerre

Le raisonnement part des deux prémisses $p \supset q$ et $\sim q$ et il conclut $\sim p$. Il suffit de voir si la conjonction des prémisses implique la conclusion, donc si $(p \supset q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ ou encore si $\vdash ((p \supset q) \wedge \sim q) \supset \sim p$. C'est bien le cas, ce qui montre tout à la fois que le raisonnement est correct et qu'il ne suffit pas d'être logique pour faire le bonheur des peuples.

1.3 Les seize opérateurs binaires

Au lieu de partir de l'usage et de s'interroger sur la façon de représenter au mieux un opérateur comme *et*, *ou*, etc, il est possible de procéder de façon formelle. Un opérateur binaire quelconque, disons $\circ$ est tel que, appliqué à deux propositions p et q, il engendre une proposition $p \circ q$. Si l'on adopte l'ordre canonique pour les valeurs de p et de$q$, l'évaluation de $p \circ q$ est fournie par un quadruple $(a\ b\ c\ d)$ où a, b, c et d ont soit la valeur 1 soit la valeur 0 et ce quadruple détermine entièrement l'opérateur $\circ$.

Laissons pour l'instant la question de l'interprétation possible des opérateurs et cherchons simplement à les dénombrer exhaustivement. On aura cinq cas à étudier.

I. $(a\ b\ c\ d)$ ne contient que des 0 ;
   1 façon : (0000)

II. $(a\ b\ c\ d)$ contient un 1 et trois 0 ;
4 façons : (1 0 0 0) (0 1 0 0) (0 0 1 0) (0 0 0 1)

III. $(a\ b\ c\ d)$ contient deux 1 et deux 0 ;
6 façons : (1 1 0 0) (1 0 1 0) (0 1 1 0) (1 0 0 1) (0 1 0 1) (0 0 1 1)

IV. $(a\ b\ c\ d)$ contient trois 1 et un 0 ;
4 façons : (1 1 1 0) (1 1 0 1) (1 0 1 1) (0 1 1 1)

V. (a b c d) ne contient que des 1.
1 façon : (1111).

Il existe donc 16 et seulement 16 opérateurs binaires possibles.

Remarque

On aurait pu trouver ce résultat d'une autre façon encore. Un opérateur binaire peut se concevoir comme une application dont l'ensemble de départ est l'ensemble des couples (ordonnés) :
$\{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ et dont l'ensemble d'arrivée est l'ensemble $\{l, 0\}$. Si V $= \{1, 0\}$, un opérateur binaire est donc une application $f\ : V \times V \to V$ où $V \times V$ représente l'ensemble produit V par V. Il suffit de dénombrer les applications f, ce que fait le tableau suivant, pour retrouver (cette fois-ci en colonne) les 16 quadruples.

p	q	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1

Il est possible de tirer davantage encore de ce qui précède. Soit P une proposition quelconque qui contient les deux atomes p et q. Ceux-ci peuvent figurer un nombre quelconque de fois dans P et les compositions peuvent se faire à l'aide d'un ou de plusieurs des seize opérateurs.

Exemple

P =df $\sim p \supset (p \vee q)$

Dans tous les cas, l'évaluation de P conduira à l'un des seize quadruples ci-dessus. Ce sera (1 1 1 0) pour cet exemple (V, p. 8), qui est aussi l'évaluation de $p \vee q$.

Cela signifie que $\sim p \supset (p \vee q)$ est équivalente à $p \vee q$, donc que

$\vdash\sim p \supset (p \vee q) \equiv p \vee q$ ou encore
$\sim p \supset (p \vee q) \leftrightarrow p \vee q$
L'ensemble Π_2 de toutes les propositions qui contiennent deux atomes est infini, puisque chaque atome peut être répété un nombre quelconque de fois et la relation d'équivalence $\leftrightarrow$ engendre une partition de Π_2 en 16 *classes d'équivalence*. Nous noterons $[a\ b\ c\ d]$ la classe de toutes les propositions dont l'évaluation est $(a\ b\ c\ d)$.

Exemples

1) Comme nous venons de le voir $\sim p \supset (p \vee q) \in [1\,1\,1\,0]$, $p \vee q \in [1\,1\,1\,0]$;
2) on s'assurera que $p \supset q \in [1\,0\,1\,1]$, $\sim p \vee q \in [1\,0\,1\,1]$,
   et que $\sim (p \wedge \sim q) \in [1\,0\,1\,1]$.

Il est aussi possible de désigner la classe $[a\ b\ c$ d$]$ en choisissant l'un quelconque de ses éléments et en le plaçant entre crochets. Ainsi, par exemple, $[p \vee q]$ désignera la classe $[1\,1\,1\,0]$, $[p \supset q]$ désignera $[1\,0\,1\,1]$, etc.

Ordonnons maintenant les 16 classes. Nous dirons que la classe $[a_1\, b_1\, c_1\, d_1]$ précède la classe $[a_2\, b_2\, c_2\, d_2]$, et nous noterons $[a_1\, b_1\, c_1\, d_1] \leq [a_2\, b_2\, c_2\, d_2]$, si un représentant quelconque de $[a_1\, b_1\, c_1\, d_1]$ implique, au sens de la relation $\rightarrow$, un représentant quelconque de la classe$[a_2\, b_2\, c_2\, d_2]$.

Exemple Soit les trois classes $[1\,0\,0\,0]$, $[1\,0\,1\,0]$ et $[1\,1\,1\,0]$. On s'assure sans peine que : $p \wedge q \in [1\,0\,0\,0]$, $q \wedge (p \vee \sim p) \in [1\,0\,1\,0]$ et $p \vee q \in [1\,1\,1\,0]$.
D'autre part, le calcul montre que :
$\vdash (p \wedge q) \supset (q \wedge (p \vee \sim p))$, $\vdash (q \wedge (p \vee)) \supset (p \vee q)$, $\vdash (p \wedge q) \supset (p \vee q)$.
On aura donc les implications :

$p \wedge q \rightarrow q \wedge (p \vee \sim p)$, $q \wedge (p \vee \sim p) \rightarrow p \vee q$, $p \wedge q \rightarrow p \vee q$.
Et il s'ensuit que :

$[1000] \leq [1010]$, $[1010] \leq [1110]$ et $[1000] \leq [1110]$. La troisième relation découle des deux premières par la transitivité de la relation « précède », qui est une relation d'ordre.

Remarques

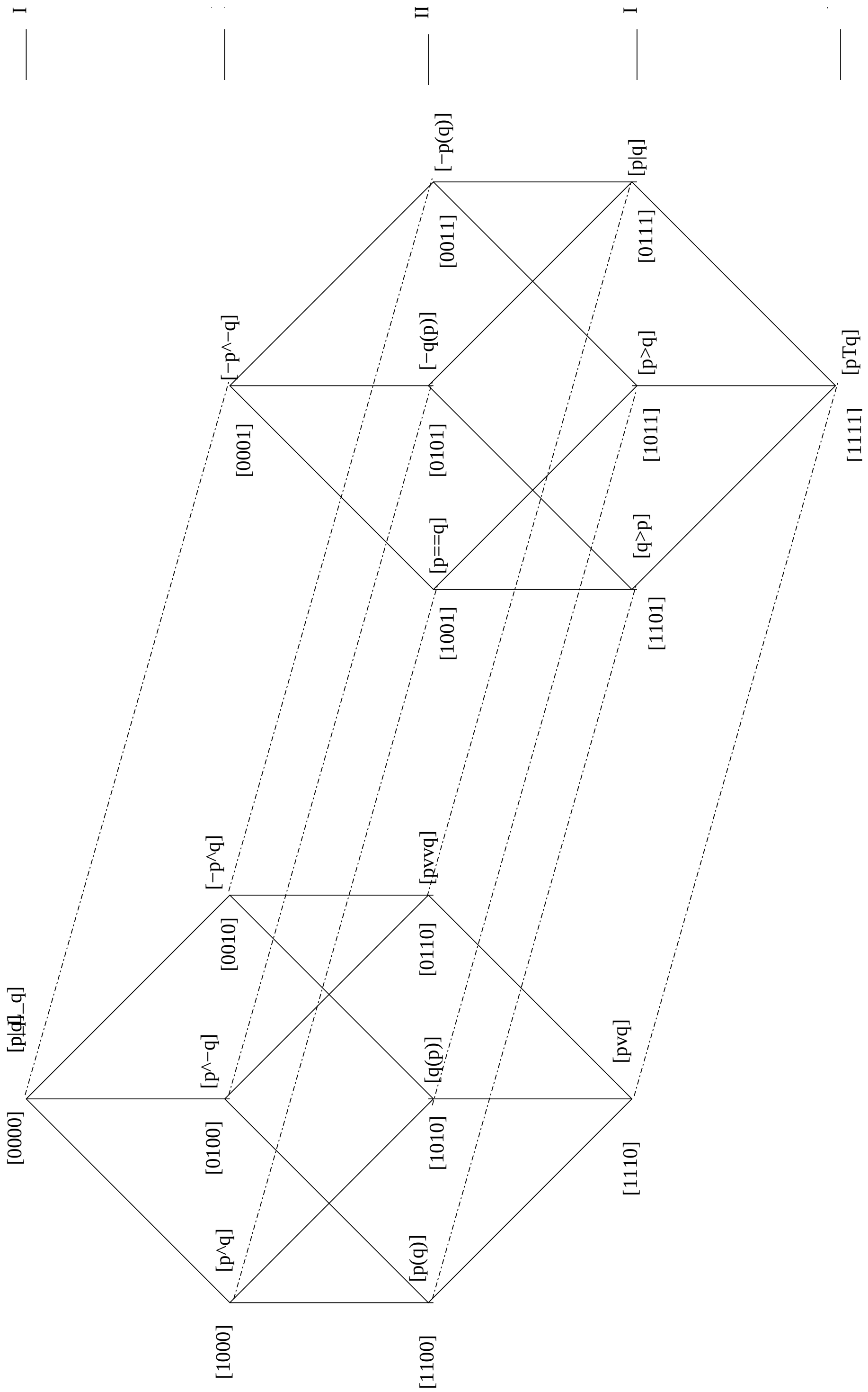

FIGURE 1.1 – Figure 1

1) $q \leftrightarrow q \wedge (p \vee \sim p)$. En effet, cela revient à dire que $q \equiv (q \wedge (p \vee \sim p))$ est une tautologie, ce que montre le calcul suivant :

p	1	1	0	0
q	1	0	1	0
$\sim p$	0	0	1	1
$p \vee \sim p$	1	1	1	1
$q \wedge (p \vee \sim p)$	1	0	1	0
Proposition	1	1	1	1

Il aurait donc été possible de choisir q comme représentant de la classe [1010]. Cela exige toutefois de se souvenir que q n'est pas ici une proposition isolée, mais bien la seconde de deux atomes. Pour garder la chose en mémoire, nous écrirons $[q(p)]$ pour représenter la classe qui contient, en particulier la proposition q, mais qui contient aussi des propositions où l'atome$p$ figure explicitement.

2) 2) D'une façon toute semblable, nous écrirons $[p(q)]$ pour la classe [1100], $[\sim p(q)]$ pour la classe [0011] et $[\sim q(p)]$ pour la classe [0101]. Ceci dit, il est possible d'ordonner les 16 classes d'équivalence comme le montre le diagramme précédent. On s'assurera par le calcul que les propositions choisies appartiennent bien aux classes correspondantes. Enfin nous avons écrit $\top$ pour désigner l'opérateur tel que $p \top q \in [1111]$ et $\perp$ pour représenter celui tel que $p.\perp q \in [0000]$.

Ce schéma a cinq niveaux et il est disposé de telle façon que si une classe de niveau n est reliée à une classe de niveau $n+k$, elle la précède. Ainsi $[0100] \leq [0111]$. Toutefois deux classes quelconques ne sont pas toujours reliées : on a affaire à un ordre partiel. Les classes d'un même niveau ne sont pas ordonnées entre elles, et il n'est pas non plus possible de comparer [1001] par exemple à [0111].

Si l'on revient à la définition que nous avons donnée de la relation $\leq$, le même schéma permet de lire les implications entre les propositions, donc les tautologies.

Exemples

$\vdash (p \wedge q) \supset p$; $\vdash p \supset (p \vee q)$; $\vdash (p \wedge q) \supset (p \supset q)$.

Enfin la proposition notée $p \perp q$ implique toutes les autres. Elle correspond à la contradiction et ce fait traduit partiellement l'adage *ex falso quodlibet sequitur*. Réciproquement, toute proposition implique celle notée $p \top q$. La

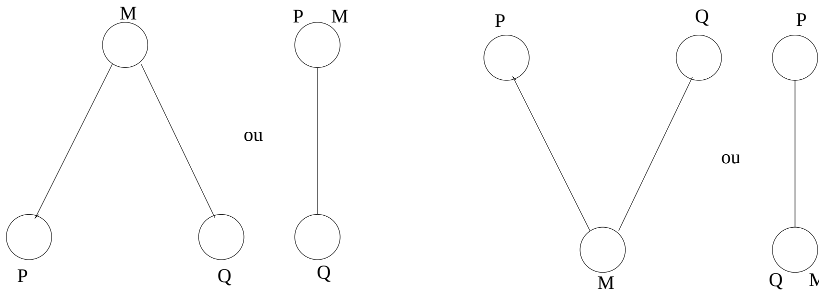

FIGURE 1.2 –

chose se comprend facilement puisque $p \top q$ correspond à la notion de tautologie. Soit P une proposition dont l'évaluation est $(a\ b\ c\ d)$. Formons la conditionnelle $P \supset (p \top q)$. On aura :

P	a	b	c	d
$p \top q$	1	1	1	1
$P \supset (p \top q)$	1	1	1	1

En effet, si a est 1, on a bien $val(1 \supset 1) = 1$ et si a est 0 on a aussi $val(0 \supset 1) = 1$. De même avec b, c et d.

Remarques

1) Soit P, Q et$M$ trois propositions qui ont entre elles les relations de la figure 2. Alors M est $P \wedge Q$. De même si P, Q et M ont entre elles les relations de la figure 3, M est $P \vee Q$.

Exemples

$(p \equiv q) \wedge (\sim p\,(q)) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q\,;\ (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \leftrightarrow q\,(p)$
$(q \supset p) \wedge (p \equiv q) \leftrightarrow p \equiv q\,;\ (p \Vee q) \vee (\sim p \wedge q) \leftrightarrow p \Vee q$

1) La structure représentée à la figure 1 est isomorphe à celle de l'ensemble des parties d'un ensemble E à 4 éléments. Elle constitue de plus un exemple d'algèbre de Boole (V. Fascicule III).

1.4 Les formes normales

Commençons par résoudre le problème suivant. Soit P et Q deux propositions éléments de Π_2. Nous savons que chacune a pour évaluation l'un des 16 quadruples de la forme $(a\ b\ c\ d)$. Comment calculer, à partir d'eux, l'évaluation de $P \vee Q$?

Exemple

Nous savons que l'évaluation de $p \equiv q$ est (1001) et que celle de $\sim p(q)$ est (0011). Il s'agit donc de trouver l'évaluation de $(p \equiv q) \vee \sim p(q)$.
On a les calculs suivants

$p \equiv q$	1	0	0	1
$\sim p(q)$	0	0	1	1
$(p \equiv q) \vee \sim p(q)$	1	0	1	1

On constate que, si à l'une des places *a, b, c, d* de l'un des quadruples au moins il y a 1, il y aussi 1 dans le quadruple résultant. C'est tout simplement une autre façon de décrire la table de vérité de $\vee$.

Ceci permet de résoudre le problème inverse. Connaissant l'évaluation d'une proposition M, disons (1011), trouver deux propositions P et Q telles que $P \vee Q$ soit équivalente à M. Un tel problème admet généralement plusieurs solutions.

Exemples

(1001)	soit	$p \equiv q$
(0011)	soit	$\sim p(q)$
(1011)	soit	M

(0010)	soit	$\sim p \wedge q$
(1011)	soit	$p \supset q$
(1011)	soit	M

(1010)	soit	$q(p)$
(1001)	soit	$p \equiv q$
(1011)	soit	M

Allons plus loin. On remarquera d'une part que rien n'empêche de chercher une proposition équivalente à M qui contienne plus d'un opérateur $\vee$ et que d'autre part quatre propositions jouissent de la propriété de n'avoir qu'un seul 1 dans leur évaluation. Ce sont $p \wedge q$ soit (1000), $p \wedge \sim q$ soit (0100), $\sim p \wedge q$ soit (0010) et $\sim p \wedge \sim q$ soit (0001).
Nous les appellerons les *conjonctions élémentaires*. Ces conjonctions élémentaires vont toujours suffire à écrire par disjonction, une proposition équivalente à tout élément de Π_2, donné.

Exemple

Si nous reprenons $M =$df $p \supset q$ dont l'évaluation est (1011), on aura :
$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q) \leftrightarrow p \supset q$.

En effet, la disjonction y est associative et il vient :

$p \wedge q$	1	0	0	0
$\sim p \wedge q$	0	0	1	0
$\sim p \wedge \sim q$	0	0	0	1
$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	1	0	1	1

D'une façon plus générale, si P est une proposition dont l'évaluation est *(a b c d)*, on obtiendra une proposition qui lui est équivalente, en écrivant la disjonction suivante :

$p \wedge q$	si $a = 1$,	rien si $a = 0$
$p \wedge \sim q$	si $b = 1$,	rien si $b = 0$
$\sim p \wedge q$	si $c = 1$,	rien si $c = 0$
$\sim p \wedge \sim q$	si $d = 1$,	rien si $d = 0$

Exemples

$p \equiv q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$	Évaluation(1001)
$p \vee q \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$	Évaluation(1110)

On appelle *forme normale disjonctive complète* (FNDC) d'une proposition donnée P la disjonction de conjonctions élémentaires qui lui est équivalente.

Remarques

1) La FNDC d'une proposition est univoquement déterminée à l'ordre des termes près. On pourra donc parler de la FNDC d'une proposition P.
2) La FNDC d'une conjonction élémentaire est cette conjonction elle-même. Il s'agit d'un cas dégénéré de disjonction.
3) Seules les propositions contradictoires de la forme $p \bot q$ n'ont pas de FNDC.
4) Les tautologies sont caractériséespar le fait que leur FNDC contient les quatre conjonctions élémentaires.

La définition de la notion de FNDC ne spécifie pas que P contient deux atomes. En effet, quel que soit le nombre des atomes, il sera toujours possible de refaire les raisonnements ci-dessus. La définition est donc générale.

Exemple

Nous allons chercher la FNDC de la proposition $p \equiv (q \wedge m)$. Celle-ci contient les trois atomes p, q et m. Nous aurons donc affaire à $2^3 = 8$ conjonctions élémentaires que nous écrirons dans l'ordre canonique.

(1)	$p \wedge q \wedge m$	soit (10000000)
(2)	$p \wedge q \wedge \sim m$	soit (01000000)
(3)	$p \wedge \sim q \wedge m$	soit (00100000)
(4)	$p \wedge \sim q \wedge \sim m$	soit (00010000)
(5)	$\sim p \wedge q \wedge m$	soit (00001000)
(6)	$\sim p \wedge q \wedge \sim m$	soit (00000100)
(7)	$\sim p \wedge \sim q \wedge m$	soit (00000010)
(8)	$\sim p \wedge \sim q \wedge \sim m$	soit (00000001)

Il suffit maintenant de calculer l'évaluation de $p \equiv (q \wedge m)$ pour être à même d'écrire sa FNDC.

p	1	1	1	1	0	0	0	0
q	1	1	0	0	1	1	0	0
m	1	0	1	0	1	0	1	0
$q \wedge m$	1	0	0	0	1	0	0	0
Proposition	1	0	0	0	0	1	1	1

La FNDC contiendra donc les conjonctions élémentaires numéros (1), (6), (7) et (8) :

$(p \wedge q \wedge m) \vee (\sim p \wedge q \wedge \sim m) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge m) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim m)$.

Il existe une seconde forme normale dite conjonctive. Pour le voir, revenons aux éléments de Π_2 et partons des quatre propositions suivantes, que nous appellerons les *disjonctions élémentaires :*

$p \vee q$	soit (1110)	$p \vee \sim q$	soit (1101)
$\sim p \vee q$	soit (1011)	$\sim p \vee \sim q$	soit (0111)

La table de la conjonction $\wedge$ montre qu'il est possible d'obtenir une proposition quelconque d'évaluation $(a\ b\ c\ d)$ en écrivant la conjonction suivante :

$p \vee q$	si $d = 0$,	rien si $d = 1$
$p \vee \sim q$	si $c = 0$,	rien si $c = 1$
$\sim p \vee q$	si $b = 0$,	rien si $b = 1$
$\sim p \vee \sim q$	si $a = 0$,	rien si $a = 1$

Exemple

Soit P =df $p \equiv q$, proposition dont l'évaluation est (1001). Il vient $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$, proposition équivalente à P. En effet :

$p \vee \sim q$	1	1	0	0
$\sim p \vee q$	1	0	1	0
$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$	1	0	0	1

On appelle *forme normale conjonctive complète* (FNCC) d'une proposition P la conjonction de disjonctions élémentaires qui lui est équivalente.

Remarques

1) On notera que la FNCC d'une proposition est univoquement déterminée, qu'il existe des conjonctions dégénérées, qu'une contradiction est caractérisée par la présence des quatre disjonctions élémentaires, que les tautologies n'ont pas de FNCC et que la définition ci-dessus est valable pour un nombre quelconque d'atomes.
2) Il existe une relation intéressante entre la FNDC d'une proposition et sa FNCC. Voyons-le sur un exemple.
   Soit P =df $p \equiv q$ proposition dont l'évaluation est (1001). Nous avons vu d'autre part que :

   la FNDC de P est $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
   la FNCC de P est $(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$

   Considérons maintenant $\sim P$. Son évaluation découle de celle de P, par l'application de la transformation de négation. C'est (0110). Or, la FNDC de $\sim P$ est $(\sim pA \wedge q) \vee (pA \wedge \sim q)$. Elle est donc composée des conjonctions élémentaires qui manquent dans la FNDC de P. Dès lors, si dans la FNDC de P, on permute les signes $\wedge$ et $\vee$, on obtient tout justement la FNDC de P.

Il en découle la *règle de dualité* suivante : Soit P une proposition mise en FNDC. On obtient la fncc de $\sim P$ en remplaçant chaque atome par sa négation et en échangeant les signes $\vee$ et $\wedge$. Si P est mise en FNCC, on obtiendra la FNDC de P par les mêmes opérations.

Exemple

Soit la proposition $p \supset q$ dont la FNDC est $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$. La fncc de $\sim (p \supset q)$ sera $(\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$. Les opérateurs

$\vee$ et $\wedge$ étant commutatifs, l'ordre est sans importance. De plus nous avons fait tacitement usage du principe de la double négation.

Vérification

L'évaluation de $p \supset q$ est (1011). Donc celle de $\sim (p \supset q)$ est (0100). Et on a :

$p \wedge q$	1	0	0	0
$\sim p \wedge q$	0	0	1	0
$\sim p \wedge \sim q$	0	0	0	1
Disjonction	1	0	1	1

$\sim p \vee \sim q$	0	1	1	1
$p \vee \sim q$	1	1	0	1
$p \vee q$	1	1	1	0
Conjonction	0	1	0	0

Cette remarquable propriété de dualité explique qu'il y ait eu intérêt à considérer la disjonction non exclusive $\vee$ comme plus fondamentale que la disjonction exclusive $\veebar$ (V. I. p. 29).

S'il est sans grand inconvénient que la FNDC d'une contradiction n'existe pas, il peut être très gênant que la FNCC d'une tautologie ne puisse s'écrire. Nous allons pour cela introduire une autre espèce de forme normale conjonctive, qui ne sera plus complète et que nous nommerons simplement FNC.

Soit une proposition quelconque, disons $\sim (p \supset q) \equiv p$. Il est possible de transformer une telle expression par des substitutions d'équivalences que nous avons examinées plus haut. Nous ferons usage :

1) Du fait que $\wedge$ et $\vee$ sont commutatives, associatives et distributives l'une par rapport à l'autre (p. 10 et 11) ;
2) Que le principe de la double négation est valide (p. 10) ;
3) Que l'on dispose des lois de Morgan (p. 11) ;
4) Que l'on peut exprimer $\supset$ et $\equiv$ à l'aide de $\sim$, $\vee$ et $\vee$ (p. 11).

Appliquons ceci à la proposition donnée. Nous indiquons à côté de chaque ligne à quel groupe d'équivalences il faut faire appel pour passer à la ligne suivante :

1.	$\sim (p \supset q) \equiv p$	(4)
2.	$\sim (\sim p \vee q) \equiv p$	(3) et (2)
3.	$(p \wedge \sim q) \equiv p$	(4)
4.	$((p \wedge \sim q) \supset p) \wedge (p \supset (p \wedge \sim q))$	(4)
5.	$(\sim (p \wedge \sim q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$	(3) et (2)
6.	$((\sim p \vee q) \vee p) \wedge (\sim p \vee (p \wedge \sim q))$	(1)
7.	$(\sim p \vee q \vee p) \wedge ((\sim p \vee p) \wedge (\sim p \wedge \sim q))$	

On constate que, au moment où aucune des règles (1) à (4) n'est plus applicable,

1) l'expression obtenue a la forme d'une conjonction,
2) chaque facteur est une disjonction qui n'est pas nécessairement une dis jonction élémentaire, en ce sens que tous les atomes n'y figurent pas toujours,
3) les signes de négation ne portent que sur les atomes. Toute proposition qui jouit de ces trois propriétés est une *forme normale conjonctive*. On dira, dans l'exemple précédent, que $\sim (p \supset q) \equiv p$ a été mise sous FNC.

Considérons maintenant le cas d'une tautologie, disons $(p \wedge (p \supset q)) \supset q$.

Mettons-la sous FNC :

1.	$(p \wedge (p \supset q)) \supset q$	(4)
2.	$\sim (p \wedge (\sim p \vee q)) \vee q$	(3)
3.	$(\sim p \vee \sim (\sim p \vee q)) \vee q$	(3) et (2)
4.	$(\sim p \vee (p \wedge \sim q)) \vee q$	(1)
5.	$((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)) \vee q$	(1)
6.	$(\sim p \vee p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q \vee q)$	(1)

On constate que la FNC existe, ce qui sera toujours le cas, puisque aucune des règles qui l'engendrent ne permet de faire disparaître un atome. De plus chacune des disjonctions contient un atome et sa négation. Cela fait que chaque disjonction a la valeur 1 et que la FNC, qui est une conjonction, a aussi la valeur 1.

1.5 Le groupe I, N, R, D

La règle de dualité ci-dessus met en jeu trois transformations :

1) passer d'une proposition à sa négation
2) remplacer les atomes p par $\sim p$ et réciproquement
3) remplacer $\vee$ par $\wedge$ et réciproquement.

Celles-ci ne sont pas sans liens entre elles et c'est même ce que la règle exprime. Toutefois il est intéressant d'étudier la chose d'une façon encore un peu différente. Pour simplifier les écritures, nous nous en tiendrons aux éléments de Π_2, mais les considérations qui suivent sont tout à fait générales.

Commençons par convenir que les lettres *a', b', c', d'* représenteront toujours les valeurs opposées aux lettres *a, b, c, d.* Donc si $a = 1$, $a' = 0$, si $a = 0$, $a' = 1$, et de même pour *b', c', d'.* Définissons alors la *transformation* de négation, notée **N**, et qui fait passer la classe d'équivalence $[abcd]$ à la classe $[a'\ b'\ c'\ d']$

$\mathbf{N}\ [a\ b\ c\ d] = [a'\ b'\ c'\ d']$.

Il est clair que $\mathbf{N}\ [a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d]$, c'est-à-dire que, si l'on applique deux fois de suite la transformation, on retrouve la classe dont on était parti. Il est commode, pour formuler la chose, d'introduire la transformation identique I, définie de la façon suivante :

$\mathbf{I}\ [a\ b\ c\ d] = [a\ b\ c\ d]$.
On pourra donc écrire :

$\mathbf{N}\ \mathbf{N}\ [a\ b\ c\ d] = \mathbf{N}\ [a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d] = \mathbf{I}\ [a\ b\ c\ d]$, ou encore : $\mathbf{N}\ \mathbf{N} = \mathbf{I}$. Convenons d'un abus de langage et d'écriture et disons que nos transformations font passer d'une proposition (élément de la classe initiale) à une proposition (élément de la classe finale).
Ainsi nous écrirons par exemple :

$\mathbf{N}$ (1000) = (0111) et même $\mathbf{N}\ (p \wedge q) = p \mid q$.
Mais on voit par le calcul que $p \mid q \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$ et l'on peut donc écrire :
$\mathbf{N}(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$.
On aura de même :
$\mathbf{N}$ (1110) = (0001)

soit encore $\mathbf{N}\ (p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$.

Si l'on applique **N** aux trois autres conjonctions élémentaires et aux trois autres disjonctions élémentaires, on constate que la transformation consiste :

1) à remplacer les atomes p et q par $\sim p$ et $\sim q$ et réciproquement,
2) à remplacer les $\wedge$ par $\vee$ et réciproquement.

Remarque

C'est ce qu'exprimaient les règles **neg** $\wedge$ et **neg** $\vee$ (V. I, 1.9).

Définissons maintenant la transformation **R** de la façon suivante :

$\mathbf{R}[a\ b\ c\ d] = [d\ c\ b\ a]$.

II est clair que l'on a de nouveau $\mathbf{R}\ \mathbf{R} = \mathbf{I}$. En effet :

$\mathbf{RR}[a\ b\ c\ d] = \mathbf{R}[d\ c\ b\ a] = [a\ b\ c\ d] = \mathbf{I}[\mathrm{a\ b\ c\ d}]$.

Nous aurons ainsi, par le même abus que tout à l'heure :
$\mathbf{R}(1000){=}(0001)$ ou $\mathbf{R}\ (p \wedge q) = \sim p \wedge \sim q$
$\mathbf{R}(1110){=}(0111)$ ou $\mathbf{R}\ (p \vee q) = \sim p \vee \sim q$

Et l'on peut constater que, appliquée à une conjonction élémentaire ou à une disjonction élémentaire, la transformation **R**, consiste à remplacer les atomes $p$et q par et $\sim p$ et $\sim q$ et réciproquement.
Remarque

Appliquée à une évaluation donnée, **R** consiste donc à la lire de droite à gauche. Ceci explique que, en décrivant la façon de construire une FNCC (V. p. 21) nous ayons dû procéder dans l'ordre *d, c, b, a.*

Appliquée à la classe [1011], **R** conduit à [1101]. Donc, on a en particulier

$\mathbf{R}\ (p \supset q) = q \supset p$.

C'est la raison pour laquelle nous appellerons **R** la *transformation réciproque.*

Définissons enfin, avec ces notations, la t*ransformation duale* (V. p. 6), que nous noterons **D** :

$\mathbf{D}[a\ b\ c\ d] = [d'c'b'a']$. On a encore $\mathbf{D}\ \mathbf{D} = \mathbf{I}$ puisque

$\mathbf{DD}\ [a\ b\ c\ d] = \mathbf{D}\ [d'c'b'a'] = [a\ b\ c\ d] = \mathbf{I}[a\ b\ c\ d]$.

Et en particulier :

$\mathbf{D}(1000) = (1110)$ ou $\mathbf{D}(p \wedge q) = p \vee q$
$\mathbf{D}(1110) = (1000)$ ou $\mathbf{D}(p \vee q) = p \wedge q$.
D'une façon générale, appliquée à une conjonction élémentaire ou à une disjonction élémentaire, la transformation **D** consiste à remplacer les $\wedge$ par $\vee$ et réciproquement.

On constate, pour ainsi dire, que **R** et **D** accomplissent chacune une part de ce qu'effectue la transformation **N** :

1) **R** agit sur la valeur des atomes
2) **D** agit sur l'opérateur.

Ceci s'exprime rigoureusement en montrant que **RD** = **DR**= **N**

RD $[a\ b\ c\ d] =$ **R** $[d'\ c'\ b'\ a] = [a'\ b'\ c'\ d'] =$ **N** $[a\ b\ c\ d]$
DR $[a\ b\ c\ d] =$ **D** $[d\ c\ b\ a] = [a'\ b'\ c'\ d'] =$ **N** $[a\ b\ c\ d]$.

Remarques

1. Il arrive assez souvent que dans la pensée spontanée, la transformation **R** soit utilisée comme négation. Ainsi peut-on observer des dialogues de la forme suivante :
   – C'est un journal bête et méchant.
   – C'est faux : il n'est ni bête, ni méchant.
   La transformation **N** aurait conduit à : « Il n'est pas bête ou pas méchant ».
2. L'étude des transformations ci-dessus a été faite pour la première fois par Jean Piaget qui appelait **D** la corrélative et la notait en conséquence **C** (V. la bibliographie à la fin du fascicule).

Il nous reste à montrer que les quatre transformations **I, N, R, D** forment un système, au sens fort du terme. Posons pour cela, $T =$ df $\{$**I, N, R**, **D**$\}$. Calculons l'effet de l'application successive à une classe de deux quelconques des éléments de T, c'est-à-dire calculons toutes les transformations $X\ Y$, où X et Y sont éléments de T. Le résultat est fourni par la table ci-contre. Les calculs n'offrent aucune difficulté. Ils se font sur le modèle de **R D** et **D R** qui précède.

	I	**N**	**R**	**D**
I	**I**	**N**	**R**	**D**
N	**N**	**I**	**D**	**R**
R	**R**	**D**	**I**	**N**
D	**D**	**R**	**N**	**I**

Il est alors possible de faire les cinq remarques suivantes :

1) Si X, $Y \in T$, $XY \in T$. La composition de deux transformations de T ne fait pas sortir de l'ensemble T.
2) Si X, Y , $Z \in T$, $(XY)Z = X(YZ)$. La composition est associative.
 Il est un peu long de s'assurer complètement de la chose, mais la façon de procéder est élémentaire. Faisons-le pour **NRD**.
 Calcul de (**NR**)**D :**
 D $[a\ b\ c\ d] = [d'\ c'\ b'\ a']$
 NR $[d'\ c'\ b'\ a'] =$ **N** $[a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d] =$ **I** $[a\ b\ c\ d]$
 Donc (**NR**)**D** $=$ **I**.
 Calcul de N(RD) :
 RD $[a\ b\ c\ d] =$ **R** $[d'\ c'\ b'\ a'] = [a'\ b'\ c'\ d']$
 N $[a'\ b'\ c'\ d'] = [a\ b\ c\ d] =$ **I** $[a\ b\ c\ d]$.
 Donc **N**(**RD**) $=$ **I** et on a bien (**NR**)**D** $=$ **N**(**RD**).
3) Il existe une transformation identique **I**.
4) Si $X \in T$, il existe $Y \in T$ telle que $XY = YX =$ **I**.
 Y est l'*inverse* de X et ici chaque transformation est sa propre inverse.
5) X, $Y \in T$, $XY = YX$. La composition est commutative ce qui se voit sur la table ci-dessus : elle est symétrique par rapport à la diagonale **I - I**.

Ces cinq faits permettent d'affirmer que l'on a affaire à un *groupe abélien* et l'on peut montrer qu'il est isomorphe au fameux groupe de Klein (mathématicien allemand : 1849-1925).

Remarque

Il existe naturellement d'autres transformations entre les 16 classes d'équivalence dont certaines forment aussi des groupes (V. Fascicule III).

1.6 Une axiomatisation

Nous allons construire un système formel pour la logique des propositions. Le « jeu » consiste à faire comme si l'on ne savait pas de quoi il s'agit, comme si les signes utilisés n'avaient pas de signification. Ce n'est que dans une seconde étape que l'on interprète les signes et l'on est alors en droit de dire que l'on a formalisé la logique des propositions, ou autre chose. Cela dépend de l'interprétation.

La première chose à faire est de se donner un *alphabet.* Le nôtre contiendra trois catégories de signes :

1) Les lettres $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$. Nous les appellerons des *variables de propositions.*
   Remarque
   Cette appellation anticipe sur l'interprétation standard que nous avons en vue. Nous pourrions nous contenter de les appeler des variables, ou même des lettres.
2) Les signes $\sim$ et $\supset$ que nous appellerons des *foncteurs.*
3) Les signes (et) que nous appellerons, comme tout le monde, des parenthèses.

Nous allons définir maintenant une classe qu'on nomme celle des *expressions bien formées* ou ebf.

1) Une variable est une ebf.
2) Si P est une ebf, $\sim P$ est une ebf.
3) Si P et Q sont des ebf, $(P \supset Q)$ est une ebf.
4) Rien n'est une ebf, sinon par (1) à (3).

Une définition du genre ci-dessus est une *définition inductive.* Elle comporte trois sortes de clauses :

une ou plusieurs clause(s) initiale(s), ici (1) ;
une ou plusieurs clause(s) inductive(s), ici (2) et (3) ;
une clause terminale, ici (4).

Une telle définition permet d'engendrer de proche en proche autant d'éléments que l'on veut de la classe qu'elle définit. Pour éviter l'usage des indices nous poserons $p =\text{df } p_1$, $q =\text{df } p_2$ et $m =\text{df } p_3$.

Exemples

p, q, $\sim p$, $(\sim p \supset q)$, $(q \supset (\sim p \supset q))$, $(p \supset (q \supset p))$ sont des ebf.

La clause finale a l'air pédant. En fait, elle est d'une importance essentielle. Considérons en effet, la suite de signes $\sim (\supset pq)$. Elle est exclusivement constituée de signes de notre alphabet. On ne peut toutefois pas l'obtenir en appliquant les clauses (1) à (3). C'est la clause terminale (4) qui nous assure que, en conséquence, il ne s'agit pas d'une ebf.

Remarque

Ceci est général. Quelle que soit la suite donnée de signes de l'alphabet, nous sommes à même de décider, en un nombre fini d'essais, si cette suite est une ebf ou non. On dit que la classe des ebf est une *classe décidable.*

L'écriture des ebf devient rapidement encombrante. Aussi allons-nous convenir de certaines abréviations. Soit l'ebf suivante :

$\sim (\sim\sim ((\sim p \supset q) \supset (\sim q \supset p)) \supset\sim ((\sim q \supset p) \supset (\sim p \supset q)))$

Posons : $P \vee Q =$df $\sim P \supset Q$.

Il vient :

$\sim (\sim\sim ((p \vee q) \supset (q \vee p)) \supset\sim ((q \vee p) \supset (p \vee q)))$

Posons : $P \wedge Q =$df $\sim (\sim P \vee \sim Q)$ donc $\sim (\sim\sim P \supset\sim Q)$.

Il vient :

$((p \vee q) \supset (q \vee p)) \wedge ((q \vee p) \supset (p \vee q))$

Posons : $P \equiv Q =$df $(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$.

Il vient :

$((p \vee q) \equiv (q \vee p))$

Convenons enfin de ne pas toujours écrire la paire extérieure de parenthèses ; l'ebf initiale peut s'écrire :

$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

Remarque

Ces jeux d'écriture formels ne réclament aucune réflexion, mais ils exigent beaucoup d'attention. Le lecteur aura intérêt à refaire lui-même les diverses transformations, ne serait-ce que pour s'assurer que le texte ne contient pas de coquilles !

Soit P, Q, M des ebf quelconques. Introduisons les trois expressions suivantes, que nous appellerons des schémas d'axiomes.

(A1) $P \supset (Q \supset P)$

(A2) $(P \supset (Q \supset M)) \supset ((P \supset Q)(P \supset M))$

(A3) $(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$

On obtiendra des *axiomes* en spécifiant quelles ebf désignent les lettres P, Q et M. A ce propos il faut noter deux choses :

1) Dans un même schéma, la même majuscule doit désigner la même ebf.
2) Mais dans un même schéma, deux majuscules différentes peuvent désigner la même ebf.

Remarque

Ces deux pratiques sont conformes à l'usage algébrique. Soit ainsi l'expression $x + y + x$. Si l'on attribue une valeur àx, disons 3, il faut écrire $3 + y + 3$. Mais rien n'empêche d'attribuer aussi la valeur 3 à y.

Voici quelques axiomes. Nous indiquons par la notation (**A**n) : P/ebf que dans le schéma (**A**n), la variable P désigne l'ebf qui suit la barre oblique.

$p \supset (q \supset p)$ (**A**l) : P/p, Q/q

$q \supset (q \supset q)$ (**A**l) : P/q, Q/q

$((p \supset q) \supset (m \supset p)) \supset (((p \supset q) \supset m) \supset ((p \supset q) \supset p))$ (**A**2) : $P/(p \supset q)$, Q/m, M/p

$(\sim m \supset \sim\sim p) \supset (\sim p \supset m)$ (**A**3) : P/m, Q/p

Il reste enfin à se donner au moins une *règle d'inférence*. Nous poserons :

(**R**1) De P et de $P \supset Q$, il est loisible d'inférer$Q$.

Cela dit, la notion de *théorème* se définit comme suit :

1) Un axiome est un théorème.
2) Toute ebf qui résulte de deux théorèmes par l'application de la règle (**R**1) est un théorème.
3) Rien n'est un théorème, sinon par (1) et (2).

Exemples

Chacune des cinq ebf suivantes est un théorème.

1.	$p \supset ((q \supset p) \supset p)$	(**A**1) : P/p, $Q/(q \supset p)$
2.	$p \supset (q \supset p)$	(**A**1) : P/p, Q/q
3.	$p \supset ((q \supset p) \supset p) \supset ((p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p))$	
4.		(**A**2) : P/p, $Q/(q \supset p)$, M/p
5.	$(p \supset (q \supset p)) \supset (p \supset p)$	1, 3, **R**1
6.	$p \supset p$	2, 4, **R**1

Remarques

1) Si P est un théorème, nous écrirons encore $\vdash P$.
2) La classe des théorèmes est introduite par une définition inductive, comme celle des ebf. Nous verrons (1.7) qu'elle est aussi décidable. Toutefois ceci exige une démonstration.
3) Au lieu de se donner les schémas d'axiomes (**A**1 - **A**3), il serait possible de se donner directement des axiomes. Par exemple :

   (**a**1) $p \supset (q \supset p)$

   (**a**2) $(p \supset (q \supset m)) \supset ((p \supset q) \supset (q \supset m))$

   (**a**3) $(\sim p \supset\sim q) \supset (q \supset p)$

   Mais pour obtenir le même ensemble de théorèmes, il faudrait se donner une règle supplémentaire :
   Si P est une ebf qui contient la variable p et si Q est une ebf, on peut inférer l'ebf que l'on obtient en substituant Q à chaque mention de p dans P. Cette façon de procéder est assez compliquée et elle exige de grandes précautions dans la logique des prédicats. C'est la raison pour laquelle nous ne l'avons pas adoptée.

Il est aussi possible de déduire des *règles dérivées*, ce qui est très commode pour la pratique. Convenons que si, à partir des prémisses P_1, P_2,...,P_n, il est possible d'inférer Q, nous écrirons :

P_1, P_2,...,$P_n \vdash Q$.

Nous pourrions ainsi reformuler la règle (**R**1) de la façon suivante :

P, $P \supset Q \vdash Q$.

Voici alors une règle dérivée :

$\sim P \supset\sim Q$, $Q \vdash P$.

On a en effet :

1.	$(\sim P \supset \sim Q) \supset (Q \supset P)$	(**A**3)
2.	$\sim P \supset \sim Q$	Première prémisse
3.	$Q \supset P$	1, 2, (**R**1)
4.	Q	Seconde prémisse
5.	P	3, 4, (**R**1)

Un tel calcul n'offre d'intérêt réel qu'une fois interprété. Son interprétation standard est évidente :

aux variables P_1, P_2,...,P_n on fait correspondre des propositions ;

aux signes $\sim$ et $\supset$, on fait correspondre respectivement l'opérateur de négation et celui de conditionnel ;

les parenthèses.jouent le rôle de ponctuation.

Dès lors, si les schémas d'axiomes et la règle d'inférence sont bien choisis, aux théorèmes correspondront des tautologies (V. 1.7).

D'autres interprétations sont toutefois possibles. Nous allons en esquisser une, en interprétant les signes $\wedge$, $\vee$ et $\sim$. Supposons que p, q, m, représentent des interrupteurs électriques. Si p est fermé, il laisse donc passer le courant, nous écrivons p. Dans ce cas, à $p \wedge q$ correspond un montage en série (Fig. 4) et à $p \vee q$ correspond un montage en parallèle (Fig. 5).

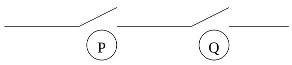

Figure 4

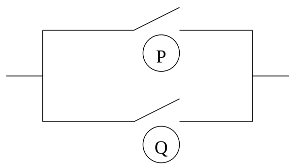

Figure 5

Nous avons noté q et$p$ les interrupteurs et non leur état.

L'ebf suivante est un théorème du calcul :

$\vdash ((p \wedge q) \vee (p \wedge m)) \equiv (p \wedge (q \vee m))$

Cela signifie que le montage de la figure 6 peut être remplacé par le montage de la figure 7.

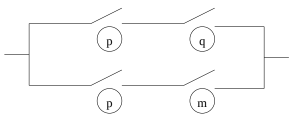

Figure 6

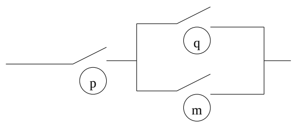

Figure 7

Il est clair que les ordinateurs ne travaillent pas avec des interrupteurs mécaniques. Leurs principes logiques reposent bien toutefois sur une interprétation électrique du système précédent.

Remarque

L'axiomatisation que nous avons proposée est empruntée à LUKASIEWICZ. Elle n'est pas la seule possible. Ainsi dans leurs *Principia Mathematica*, WHITEHEAD et RUSSELL sont partis des opérateurs $\sim$ et $\vee$ et NICO du seul opérateur $|$.

1.7 Quelques propriétés de la logique des propositions

Après qu'on a construit un logique, et plus généralement un système formel quelconque, il convient d'en dégager les principales propriétés. Celles-ci doivent naturellement être démontrées. Elles font alors l'objet de théorèmes qui portent *sur* le système : nous les appellerons des *épithéorèmes*. Démontrer un épithéorème exige de disposer de certains moyens logiques. S'ils se veulent rigoureux, ceux-ci ne sont pas élémentaires et dépassent le cadre de cet ouvrage. Nous allons cependant énoncer un certain nombre d'épithéorèmes relatifs à la logique des propositions et en esquisser des preuves simples.

Remarquons d'abord que nous avons affaire à deux notions de théorèmes. Au fascicule I, nous avons dit qu'un théorème était une expression qui pouvait se déduire, par les règles du système, de la classe d'hypothèses vide. Si P est un théorème en ce sens, nous noterons provisoirement $\vdash_1 P$. Par ailleurs, nous venons de donner une autre définition de la notion de théorème. Si P est un théorème en ce second sens, nous écrirons $\vdash_2 P$. La question qui se pose est de savoir, non pas si les deux notions sont les mêmes (en fait, elles sont formulées différemment), mais si la classe des théorèmes au sens 1 est la même que celle des théorèmes au sens 2. Comme, par définition, deux classes sont égales si elles contiennent les mêmes éléments, il suffit de se demander si, chaque fois que l'on a $\vdash_1 P$ on a aussi $\vdash_2 P$ et réciproquement. La réponse à cette question est affirmative.

Epithéorème 1 : $\vdash_1 P$ si et seulement si$\vdash_2 P$.

La preuve doit être double. Il faut montrer :

I) Si $\vdash_1 P$ alors $\vdash_2 P$.

II) Si $\vdash_2 P$ alors $\vdash_1 P$.

Commençons par esquisser la preuve de II. Dire que$\vdash_2 P$, c'est dire que l'on a pu obtenir P à partir d'axiomes en appliquant la règle (**R**1). Or il est facile de montrer que les trois schémas d'axiomes sont des métathéorèmes au sens 1 (V. I, p. 22). Il suffit, par exemple, d'écrire avec des majuscules la déduction de l'exemple 2 de la page 15 (Fascicule I), pour obtenir (**A**1). D'autre part, la règle (**R**1) n'est rien d'autre que la règle $\supset$e. Donc, tout ce qui sera théorème au sens 2, le sera au sens 1.

Esquissons maintenant la preuve de I. Nous avons vu qu'il était possible, dans le cadre de l'axiomatique précédente, de déduire des règles à partir des schémas d'axiomes. Il est clair que l'on peut procéder de même à partir de schémas de théorèmes ou métathéorèmes. Supposons, ce qui est le cas mais que nous ne démontrerons pas, que l'on ait :

$\vdash_2 P \supset (Q \supset \ (P \wedge Q))$.

On aura immédiatement, par une double application de (**R**1) : $P, Q \vdash_2 P{\wedge}Q$, ce qui n'est qu'une autre écriture pour la règle $\wedge$**i.**

En conséquence de ce premier épithéorème, nous écrirons dès maintenant $\vdash P$ pour dire que P est un théorème, aussi bien au sens 1 qu'au sens 2.

Examinons les relations entre la classe des théorèmes et celle des tautologies et, pour cela, notons provisoirement par $\vdash_t P$, le fait que P est une tautologie. Nous avons tout d'abord :

Epithéorème 2 : Si $\vdash P$, alors $\vdash_t P$.

Dire que$\vdash P$, c'est dire que P a son origine dans un ou plusieurs axiomes. Mais, il est aisé de s'assurer que tous les axiomes du système sont des tautologies. En effet, quelles que soient les propositions P, Q et$M$, elles seront dans notre interprétation, vraies ou fausses. On aura donc pour (**A**l) par exemple :

P	1	1	0	0
Q	1	0	1	0
$P \supset Q$	1	1	0	1
$P \supset (P \supset Q)$	1	1	1	1

De plus, si$\vdash P$, il est engendré à partir d'axiomes qui sont des tautologies, par la seule règle (**R**1). Or celle-ci conserve, si l'on peut dire, la vérité. En effet, ses deux prémisses$P$ et $P \supset Q$ sont des tautologies. Considérons alors la table de $\supset$:

P	$\supset$	Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0

Sa deuxième ligne est exclue par la condition $val(P \supset Q) = 1$. Ses lignes 3 et 4 sont exclues par 1 0 0 la condition $val(P) = 1$. Il ne reste donc que la première ligne et l'on voit que $val(Q) = 1$.

L'épithéorème 2 a deux corollaires importants.

Définition. Un système formel, dont un signe, disons $\sim$, est interprété comme la négation est *non contradictoire*, s'il est impossible d'y démontrer à la fois P et $\sim P$.

Corollaire 1. La logique des propositions est non contradictoire.

Supposons, en effet, que $\vdash P$. Alors, par l'épithéorème 2, on $\vdash_1 P$. Il s'ensuit que $\sim P$ n'a que que des 0 dans son évaluation et que $\sim\vdash_1 P$, c'est-à-dire que P n'est pas une tautologie. Par contraposition, l'épithéorème 2, montre que $\sim\vdash\sim P$, donc que $\sim P$ n'est pas un théorème.

Remarque

La *contraposée* d'un théorème de la forme « si P alors Q » est l'expression « si $\sim Q$ alors $\sim P$ ». Les deux formes sont logiquement équivalentes.

La définition de la non-contradiction exige que le système soit interprété. Qu'en est-il des systèmes purement formels ? Pour faire face à ce problème, on pose :

Définition. Un système est *consistant*, s'il possède au moins une ebf qui n'est pas un théorème.

Corollaire 2. Le système de la logique des propositions est consistant.

En effet, nous avons vu que $\vdash (p \supset p)$. Par l'épithéorème 2, on $\vdash_1 p \supset p$. En conséquence $\sim\vdash_1\sim (p \supset p)$et par la contraposée de l'épithéorème, $\sim (p \supset p)$ est un exemple d'ebf qui n'est pas un théorème.

Remarque

On peut prouver que si un système est non contradictoire, il est toujours consistant, mais que la réciproque n'est pas vraie. La condition de noncontradiction est donc « plus forte » que celle de consistance.

Epithéorème 3 : Si $\vdash_1 P$ alors $\vdash P$.

La marche de la preuve, qui est assez longue, est la suivante :

1) Démontrer que si P^* est la FNC de P, on a le métathéorème $\vdash P \equiv P^*$.
2) Si $\vdash_1 P^*$ alors chacune de ses disjonctions est aussi une tautologie. Si l'une d'elles ne l'était pas, il se pourrait en effet que la conjonction ne soit pas toujours vraie.
3) Démontrer $\vdash p \vee \sim p$. Comme on a la règle dérivée $P \vdash P \vee Q$, toute disjonction élémentaire sera un théorème. Mais comme on a aussi la règle dérivée $P, Q \vdash P \wedge Q$, toute FNC tautologique sera un théorème. Donc $\vdash P^*$
4) Démontrer que $P \equiv P^* \vdash P^* \supset P$. Alors, par les points (1), (3) et (**R**1), il vient $\vdash P$.

Cet épithéorème a aussi deux corollaires importants.

Définition. Un système interprété est *complet au sens faible*, si l'on peut y démontrer toutes les ebf qui correspondent à des vérités dans l'interprétation choisie.

Corollaire 1. Si l'on considère que toute tautologie est une vérité logique, le calcul des propositions est complet au sens faible.

L'épithéorème 3 dit, en effet, que toute tautologie est un théorème.

Mais il est de nouveau possible d'introduire une notion de complétude qui n'exige pas d'interpréter le système.

Définition. Un système est *complet au sens fort*, si l'adjonction à ses schémas d'axiomes d'un schéma d'ebf qui n'y est pas démontrable, le rend inconsistant.

Corollaire 2. Le système de la logique des propositions est complet au sens fort.

Soit en effet, un schéma d'ebf P qui n'est pas démontrable. Posons $(\mathbf{A}4)P$. Soit de nouveau P^* la FNC de P. Nous aurons $\vdash P \equiv P^*$ et par $(\mathbf{A}4)$ et $(\mathbf{R}1)$, il viendra $\vdash P^*$ et par l'épithéorème 3, P^* est une tautologie. Par ailleurs, puisque par hypothèse $\sim\vdash P$, P^* doit contenir au moins une disjonction qui ne contient pas un atome et sa négation, disons qui ne contient pas p et $\sim p$. Soit $D =$df $Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$ cette disjonction.

Comme on a la règle dérivée $P \wedge Q \vdash Q$ on aura en particulier $P^* \vdash D$ (P^* est une conjonction qui, entre autres facteurs, contient D). Et comme on a P^*, par $(\mathbf{R}1)$ on a $\vdash D$, soit $\vdash Q_1 \vee \ldots \vee Q_n$. Les Q_i $(i = 1, 2, ..., k)$ sont soit des atomes, soit la négation d'un atome.

Si Q_1 est un atome qui n'est pas précédé d'une négation, substituons-lui p. Si Q est un atome précédé d'une négation, substituons-lui $\sim p$. En éliminant les doubles négations, on aura $\vdash p \vee \ldots \vee p$ et donc $\vdash p$.

Un raisonnement analogue montre qu'on peut aussi obtenir $\vdash\sim p$. En conséquence le système est contradictoire. Mais il est aussi inconsistant, par la règle : $P, \sim P \vdash Q$.

Remarque

La terminologie utilisée laisse entendre, ce qu'on peut démontrer, qu'un système peut être complet au sens faible sans l'être au sens fort (V. 2.4).

Si l'on réunit les épithéorèmes 2 et 3, on est conduit à :

Epithéorème 4 : $\vdash P$ si et seulement si $\vdash_t P$.

Il en découle aussi un corollaire intéressant.

Définition. Un système est décidable si, étant donné une de ses ebf quelconque, il existe un algorithme qui permet de décider si cette ebf est un théorème du système ou non.

Corollaire. Le système de la logique des propositions est décidable.

L'algorithme est le suivant. Soit P l'ebf donnée, on calcule son évaluation.

Si elle ne contient que des 1, alors $\vdash_t P$ et $\vdash P$. Sinon $\sim\vdash_t P$ et $\sim\vdash P$.

Remarques

1. Nous avons donné trois présentations de la logique des propositions : par les règles de déduction, par les tables de vérité et par une axiomatisation. Les tables de vérité fournissent les manipulations les plus aisées. Malheureusement, elles ne peuvent s'étendre à la logique des prédicats. C'est la présentation axiomatique qui conduit aux manipulations les plus difficiles. Il y faut souvent beaucoup de pratique et d'imagination. C'est toutefois elle qui se prête le mieux à la réflexion sur la logique. Enfin la méthode de la déduction naturelle est celle qui est généralisable et qui semble la plus commode à utiliser.
2. Les raisonnements de ce paragraphe manquent de rigueur. Il ne faut les tenir que pour des indications, propres tout au plus à faire pressentir le genre de démarches auxquelles conduit ce qu'on appelle la métalogique (V. la bibliographie).